几 何 明 珠

黄家礼 编著

科学普及出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

几何明珠/黄家礼编著. —北京:科学普及出版社,
1997.6

ISBN 7-110-03511-5

Ⅰ.几… Ⅱ.黄… Ⅲ.几何—普及读物Ⅳ.018-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17555 号

科学普及出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号　邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
北京市迪鑫印刷厂印刷
*
开本:787 毫米×1092 毫米　1/32　印张:7 字数:160 千字
1997 年 9 月第 1 版　1997 年 9 月第 1 次印刷
印数:10000 册　定价:9.50 元

序

自《周髀》、《九章》、《墨经》及《原本》问世以来，经历数千年的风霜雨雪，几何学形成了宏大、严谨的逻辑体系，支系繁多、变幻莫测的几何大千世界，占据着数学王国的半壁河山。

在几何学发展的历史长河中，自不乏洪涛大浪，激流险滩，然而也曾溅起无数朵晶莹的浪花，像颗颗明珠，闪烁着真理的光辉，把几何学点缀得更加美妙，更加富于情趣。

由于种种原因，我们“正规的”几何教学没有能够给学生接触这些内容创造必要的机会，致使青少年在这些宝贵的数学遗产面前，显得那样贫乏、陌生，更无法汲取这些几何明珠发现过程中的思维经验和难得的启示。

欣喜的是我们有远见的数学家和数学普及工作者为了弥补这一缺陷，为青少年和数学爱好者撰写了大批趣味数学、数学游戏和普及读物，涉及到有关内容的如史丹因豪斯（波兰）的《数学万花镜》、《100个数学问题》，别来利曼（前苏联）的《趣味几何学》、德里（德国）的《100个著名的初等数学问题》、高希尧（中国）的《数海钩沉》、考克塞特与格雷策（美国）的《几何学的新探索》及矢野健太郎（日本）的《几何的有名定理》，但这些书籍有的是一鳞半爪，难窥全豹；有的仅是简略介绍，缺乏“数学味”；有的则是用复数、变换等“统一”处理方法，既失去了这些“明珠”发现的历史本来面目，又难于为只熟悉“综合几何”方法的广大青少年所接受。而我们面前的这本《几何明珠》正好弥补了这种“不足”，它注意了选材的丰富、全面；叙述的生动和深入浅出，又不失数学的严谨性；既不脱离课本，又不局限于课本；既开阔视野，又锻炼思维；既可作为正课学习

的参考书，从中汲取对“双基”的启迪和解题方法，又提供了深入探索研究的题材。当然，如果本书若能注意更多一点收集我国古今几何方面发现的珍品，将会更加全面、丰富。

本书著作者知识渊博，思想活跃，文笔简炼清新。特别难能可贵的是他运用波利亚倡导的类比、归纳、推广、检验等一套合情推理的方法，按照几何明珠发现的本来历史过程在现行几何课本中寻找她们的“近亲”，然后再“推广”开去，使我们在阅读时总有似曾相识的感触，甚至不禁要问自己：为什么我在学到这里时没有发现她呢？面对一个又一个思路别致、风格迥异的证明，我们自然会问自己：我能找出一个新证法吗？归纳、类比、实验、观察、推广、猜测是攻克数学难关，发现数学真理的有力武器。几何学的奥妙及所研究的课题是无穷无尽的，我们几何课本中许多内容的深处都埋藏着璀璨的明珠，善读者、乐思者必会有所发现。而本书正好为我们提供了乐思善读的丰富经验和模仿练习的众多良机。

孔子曰：学而时习之，其乐无穷。祝君成功！

杨　之

1988年夏于天津宝坻

前　言

在几何学发展的历史长河中，许多经久不衰的几何名题，犹如一颗颗闪烁的明珠，璀璨夺目，光彩耀人，推动着几何学乃至整个数学的发展。它们中有的从一发现就吸引着人们的关注，有的经过几代甚至几十代数学家的努力，得出许多耐人寻味、发人深省的结论。

本书集之翡翠，汇其精华，从中挑选出20余件珍品，通过证明解法的探求，得出许多有趣的引伸和推广，挖掘出它们在解题中的各种巧妙应用。相信它对激发读者的数学兴趣、丰富数学素养、培养数学能力将大有裨益。

在编写过程中，笔者回避了复数、向量、变换等方法和技巧，这样处理虽然不一定简捷，但我们认为似乎更符合这些名题产生的历史事实。同时也为中学生，特别是初中学生阅读本书铺平了道路，让他们领略到这些数学精品的极妙意境。

天津的杨之老师和湖北大学《中学数学》编辑部的汪江松主任在书稿的审理过程中，提出了许多宝贵意见，令本书增色不少。湖北省数学特级老师江志和荆州市教研室郭章华老师对本书的出版极为关心。本书还凝集着许多师长、同事、好友的真知灼见和情谊，在此一并表示感谢。

因水平有限，谬误之处难免，敬请指正。

作　　者

1997 年 7 月

目　　录

第一章　勾股定理

§1.1　定　　理

勾股定理　直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

若设 a、b、c 为直角三角形的三边，c 为斜边，则

$$a^2+b^2=c^2.$$

我国古代称直角三角形为勾股形，并且直角边中较小者为勾，另一直角边为股，斜边为弦，所以称这个定理为勾股定理，也有人称商高定理. 这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠，被誉为“几何学的基石”，而且在高等数学和其他科学领域也有着广泛的应用.

勾股定理从被发现至今已有 5000 多年的历史，5000 多年来，世界上几个文明古国都相继发现和研究过这个定理. 古埃及人在建筑金字塔和测量尼罗河泛滥后的土地时，就应用过勾股定理. 我国也是最早了解勾股定理的国家之一，在 4000 多年前，我国人民就应用了这一定理. 据我国一部古老的算书《周髀算经》(约西汉时代，公元前 100 多年的作品)记载，商高(约公元前 1120 年)答周公曰：“勾广三，股修四，径隅五”. 这句话的意思就是：在直角三角形中，若勾长为 3，股长为 4，则弦长为 5. 这就是人们常说的“勾三、股四、弦五”，这当然是勾股定理的特殊情形. 但这本书中同时还记载有另一位中国学者陈子(公元前 7～前 6 世纪)与荣方在讨论测量问题

时说的一段话："若求邪(斜)至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日"(图 1-1).

即　邪至日 $=\sqrt{勾^2+股^2}$.

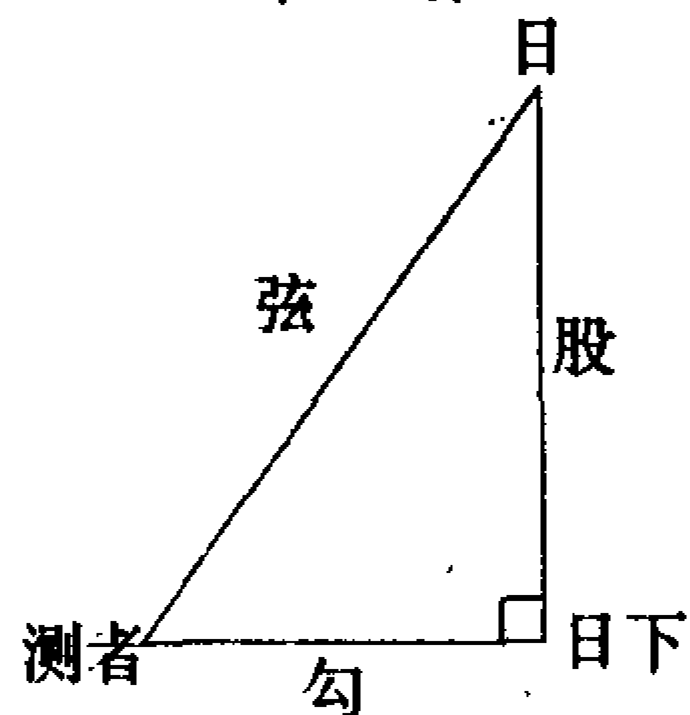


图 1-1

这里给出的是任意直角三角形三边间的关系. 因此，也有人主张把勾股定理称为"陈子定理".

2000 多年前，由于希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 585 ～ 前 497 年)学派也发现了这条定理，所以希腊人把它叫毕达哥拉斯定理. 相传当时的毕达哥拉斯学派发现，若 m 为大于 1 的奇数，则 m、$\frac{m^2-1}{2}$、$\frac{m^2+1}{2}$ 便是一个可构成直角三角形三边的三元数组. 果真如此，可见这个学派当时是通晓勾股定理的. 但这一学派内部有一规定，就是把一切发明都归功于学派的头领，而且常常秘而不宣. 据传说，发现这个定理的时候，他们还杀了 100 头牛酬谢供奉神灵，表示庆贺. 因此，这个定理也叫"百牛定理". 至于毕达哥拉斯学派是否证明了这一定理，数学史界有两种不同的观点，一种意见认为证明过，理由如前所述. 另一种意见则认为证明勾股定理要用到相似形理论，而当时毕达哥拉斯学派没有建立完整的相似理论，因此他们没有证明这一定理.

勾股定理在法国和比利时又叫"驴桥定理"，这自然也有它的来历.

人类对勾股定理的认识经历了一个从特殊到一般的过程，而且在世界上很多地区的现存文献中都有记载，所以很难区分这个定理是谁最先发现的. 国外一般认为这个定理是毕达哥拉斯学派首先发现的，因此，国外称它为毕达哥拉斯定

理.历史文献确凿地证明,商高知道特殊情况下的勾股定理比毕达哥拉斯学派至少要早五六个世纪,而陈子掌握普遍性的勾股定理的时间要比毕达哥拉斯早一二百年,是我们的祖先最早发现这一定理的,这就是我们把它称为"勾股定理"、"商高定理"或"陈子定理"的理由.

§1.2 定理的证明

几千年来,人们给出了勾股定理的各种不同的证明,有人统计,现在世界上已找到它的证明方法有 400 多种.仅 1940 年,由鲁米斯(E. S. Loomis)搜集整理的《毕达哥拉斯定理》一书就给出了 370 种不同的证明.

我们的祖先对勾股定理作过较深入的研究.我国对勾股定理的最早证明,载于《勾股圆方图注》里,它是由后汉人赵爽(字君卿,公元 3 世纪)给出的,里面附有一张"弦图"(图 1-2).方法是:"按弦图,又可以勾股相乘为朱实二,倍之为朱实四,以勾股之差相乘之为中黄实,加差实,亦成弦实."这里的"实"指面积,把图中($\triangle ABC$等)四个直角三角形涂上朱色,其面积叫做"朱实",中间的正方形($CDEF$)涂上黄色,其面积叫做"中黄实".于是上文用算式表示就是

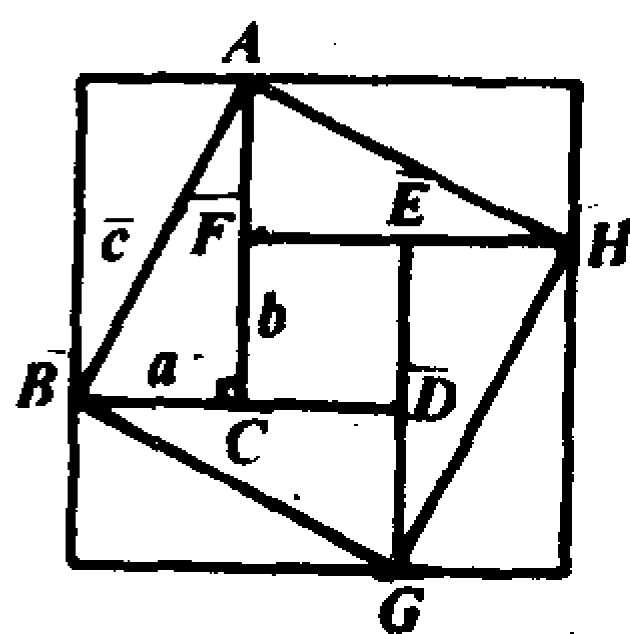


图 1-2

$ab = 2S_{\triangle ABC}$, (勾股相乘为朱实二)

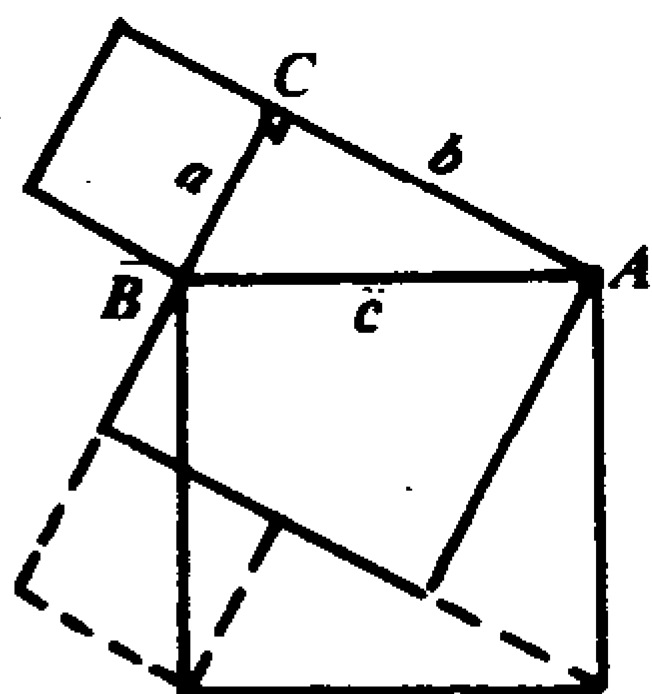
$2ab = 4S_{\triangle ABC}$, (倍之为朱实四)

$(b-a)^2 = S_{CDEF}$, (勾股之差相乘之为中黄实)

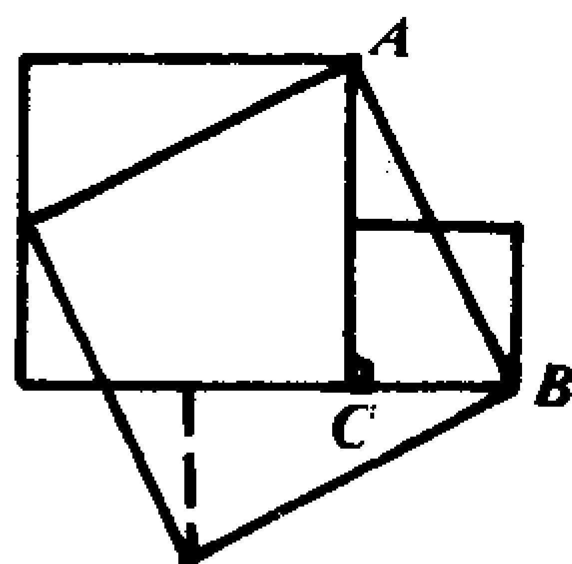
$2ab + (b-a)^2 = c^2 (= S_{ABGH})$,(加差实,亦成弦实)

即 $a^2 + b^2 = c^2$.

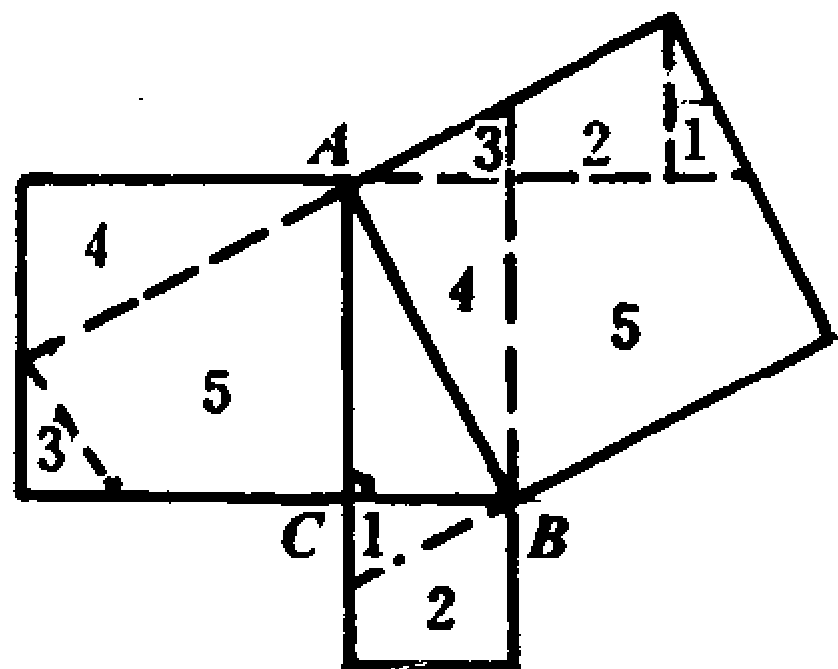
这种证明方法巧妙而又简便，开了面积出入相补证法的先河，至今还被采用. 还有三国时期的刘徽、清代的梅文鼎、李锐、华蘅芳等，创造了许多不同的面积证法，下面将他们研究的图形录绘若干幅，如图 1-3，从中我们可领会他们研究的神妙.



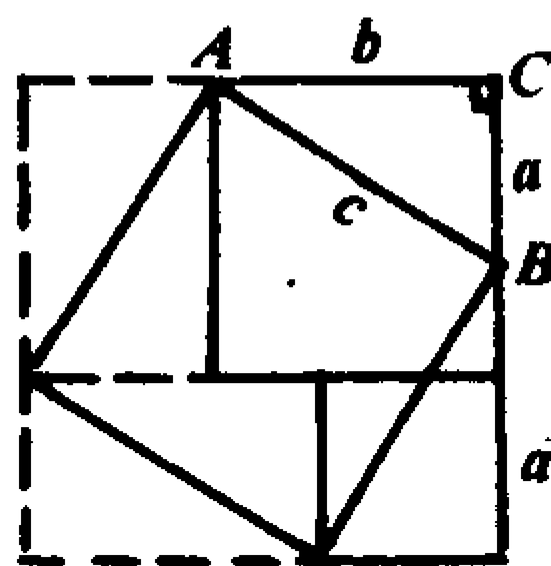
梅文鼎图



李锐图



华蘅芳图



何梦瑶图

图 1-3

现存勾股定理最早的证明出自欧几里得(Euclid，约公元前 330 ～ 前 275 年）的《几何原本》命题 47. 他把勾股定理换成了另一种形式："直角三角形斜边上的正方形面积等于两直角边上的正方形面积之和". 其证法是(如图 1-4)

先证 $\triangle ABD \cong \triangle FBC$.

$S_{矩形BDLM} = 2S_{\triangle ABD}$,

$S_{正方形ABFG} = 2S_{\triangle FBC}$.

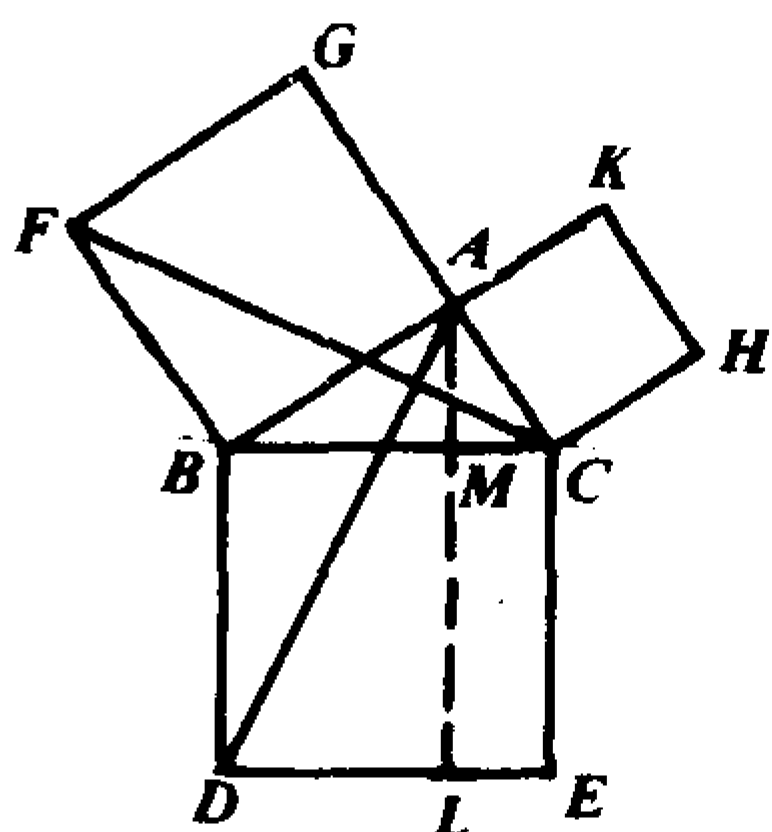


图 1-4

从而 $S_{矩形BDLM}=S_{正方形ABFG}$;

同理 $S_{矩形CELM}=S_{正方形ACHK}$.

上述两式相加即得

$$S_{正方形BCED}=S_{正方形ABFG}+S_{正方形ACHK}.$$

但上述证法不是最简的,最简的证法是利用相似三角形的理论证明.

如图 1-5,作直角三角形 ABC 斜边 AB 上的高 CD,则 $\triangle ABC\backsim\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,

有 $a^2=qc, b^2=pc$,

所以 $a^2+b^2=qc+pc$

$=(q+p)c=c^2$.

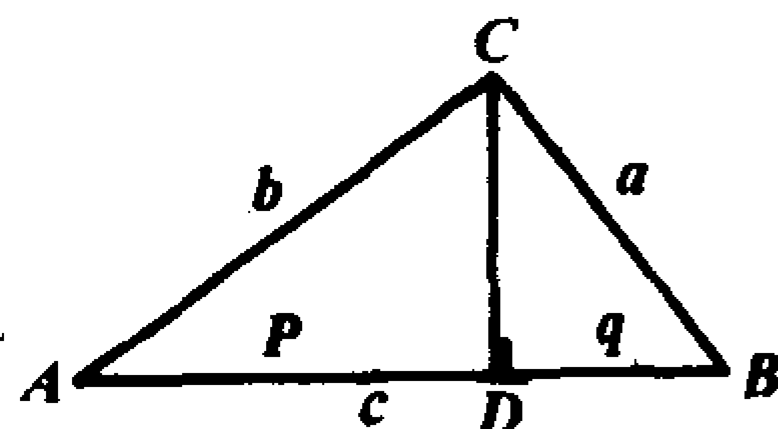


图 1-5

值得一提的是在多达 400 多种的证法之中,居然有两种证法一个出自美国第二十届总统加菲尔德(Garfield,1831～1881 年)之手,另一个是由身为国王的印度数学家踆斯迦罗给出.

1876 年 4 月,加菲尔德在波士顿周刊《新英格兰教育杂志》上发表了勾股定理的一个别开生面的证法. 1881 年他当选为总统,于是他的证明也就成为人们津津乐道的一段轶事了.

加菲尔德的证法确实十分干净利落. 如图 1-6,在直角 $\triangle ABC$ 的斜边上作等腰直角 $\triangle BCE$,过 E 作 $ED\perp AC$ 交于 D,则有 $\triangle ABC\cong\triangle DCE$.

设梯形 $ABED$ 面积为 S,则

$$S=\frac{1}{2}(a+b)^2$$

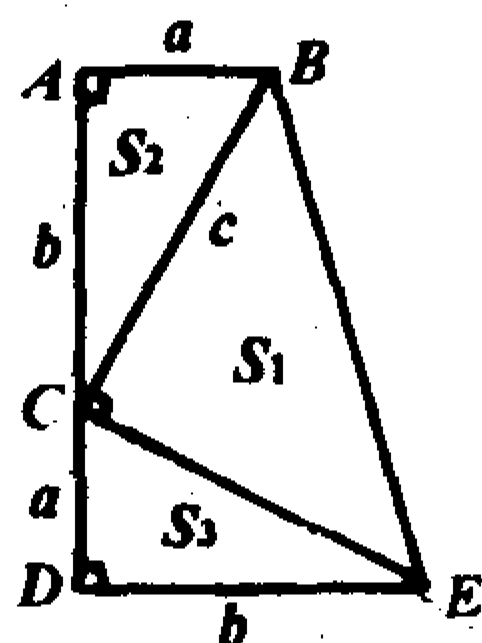


图 1-6

$$= \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2),$$

又 $S = S_1 + S_2 + S_3$

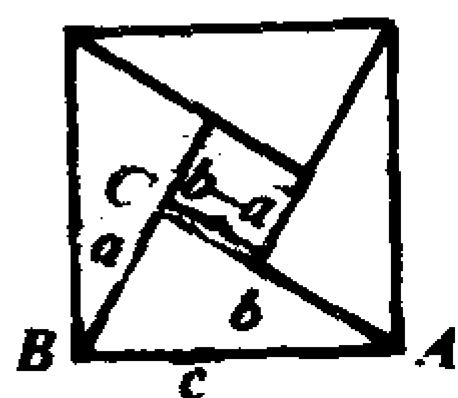
$$= \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}(c^2 + 2ab).$$

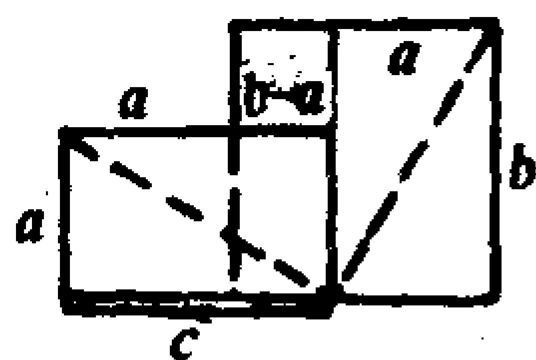
两式比较即得 $a^2 + b^2 = c^2$.

婆斯迦罗的证明也很奇妙：

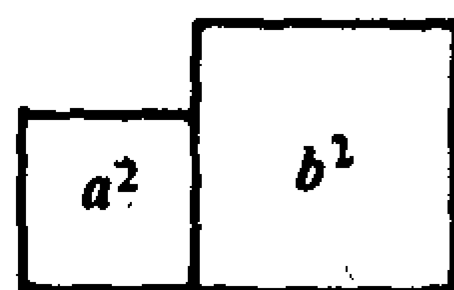
如图 1-7(a) 是由四个直角三角形和一个正方形构成的一个边长为 c 的大正方形，因而其面积为 c^2，中间的小正方形的边长是 $b-a$. 把(a) 中的四个直角三角形拼成两个长方形，再与小正方形拼在一起，得到图(b)，在该图中引一铅垂虚线，标上各边的长，适当简化后恰好成为图(c) 所示的由边长分别为 a、b 的两个正方形组成。因此有 $c^2 = a^2 + b^2$，勾股定理得证.



(a)



(b)



(c)

图 1-7

勾股定理的逆命题成立，而且应用也很广泛.

勾股逆定理 在 $\triangle ABC$ 中，若 $AC^2 + BC^2 = AB^2$，则 $\angle C$ 为直角.

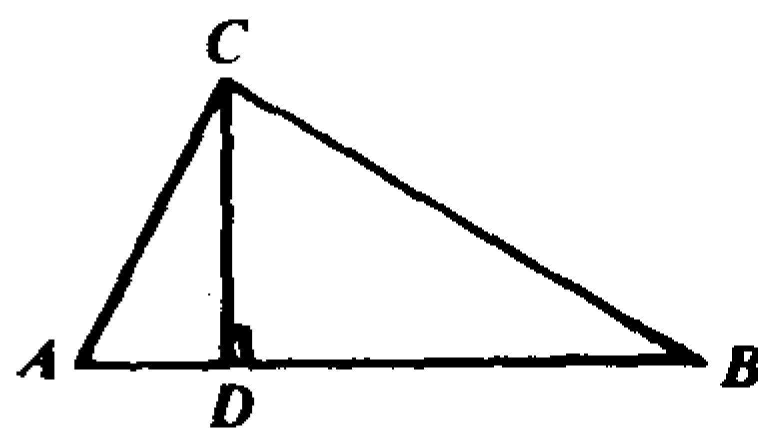


图 1-8

证明 如图 1-8，过 C 作 AB 的垂线，垂足为 D.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle CDB$ 中,由勾股定理有

$$AC^2 = CD^2 + AD^2,\ BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

所以 $AC^2 + BC^2 = 2CD^2 + AD^2 + BD^2$,

已知 $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

所以 $AB^2 = (AD + DB)^2 = 2CD^2 + AD^2 + BD^2$

故得 $CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{CD}{AD}$.

所以 $\mathrm{Rt}\triangle BCD \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAD \Rightarrow \angle BCD = \angle CAD$,

$$\angle BCA = \angle BCD + \angle DCA = \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ.$$

即 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 为直角.

§1.3 定理的变形与推广

1. 定理的变形

若 a、b、c 为直角三角形的三边,c 为斜边,则

(1) $a^2 = c^2 - b^2$;

(2) $c^2 = (a + b)^2 - 2ab$;

(3) $2ab = (a + b + c)(a + b - c)$ 或 $\dfrac{1}{2}ab = p(p - c)$;

(4) $2ab = (b + c - a)(a + c - b)$ 或 $\dfrac{1}{2}ab = (p - a)(p - b)$

其中 $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$.

2. 定理的推广

(1) 将边上图形一般化,可得

定理 1.1 在直角三角形的勾股弦上分别向外作任意相似的图形,则弦上图形的面积等于勾和股上图形的面积之和(图 1-9).

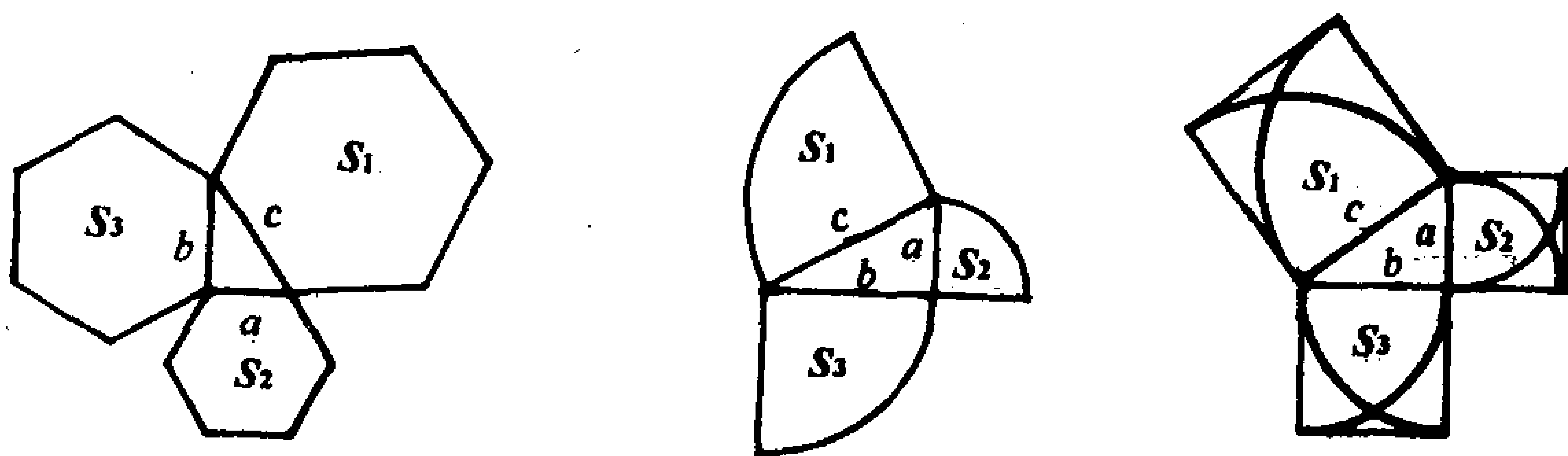


图 1-9

证明 设弦上图形的面积为 S_1，勾股上图形面积分别为 S_2、S_3，则

$$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{a}{c}\right)^2,\quad \frac{S_3}{S_1}=\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$S_2+S_3=\frac{a^2+b^2}{c^2}S_1=S_1.$$

在欧几里得《几何原本》第六篇就有上述推广的记载.

(2) 将直角三角形向任意三角形推广，可得

定理 1.2 若 a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 的三条边长，$\angle C$ 为边 c 的对角，则

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

此即余弦定理，当 $\angle C=90^\circ$ 时，即为勾股定理.

定理 1.3 在任意三角形的大边上向内侧作平行四边形，使它的另两个顶点位于三角形外，再在三角形的另两边上分别作平行四边形，使与三角形两边分别平行的边过大边上所作平行四边形的另两个顶点. 则大边上平行四边形的面积等于另两边上平行四边形面

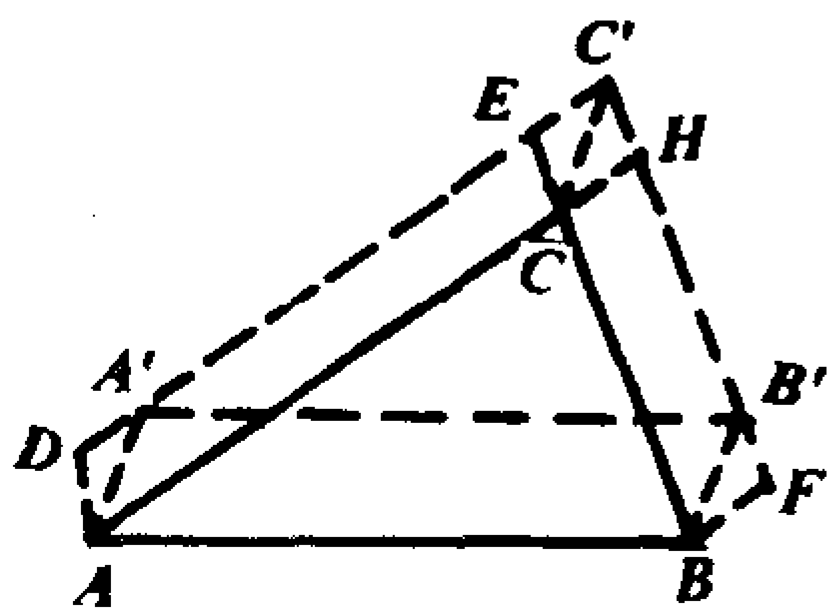


图 1-10

积之和.

证明 如图 1-10 所示,依题设,则有

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}, S_{ACC'A'}=S_{ACED}$

$S_{BB'C'C}=S_{BFHC}$.

若从五边形 $ABB'C'A'$ 减去 $\triangle A'B'C'$ 的面积,则得 $S_{ABB'A'}$;若从五边形 $ABB'C'A'$ 减去 $\triangle ABC$ 的面积,则得

$S_{ACC'A'}+S_{BB'C'C}$. 故有

$S_{ABB'A'}=S_{ACC'A'}+S_{BB'C'C}=S_{ACED}+S_{BFHC}$,

命题得证.

定理 1.3 是希腊数学家帕普斯(Pappus,约公元 300 年)发现的,并载于他的《数学汇编》第四卷.

(3) 把三角形向多边形推广,可得

定理 1.4 点 P 是凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 所在平面上任意一点,从点 P 分别向各边作垂线,垂足为 B_1、B_2、$\cdots$、B_n,则 $A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_nB_n^2=B_1A_2^2+B_2A_3^2+\cdots+B_{n-1}A_n^2+B_nA_1^2$(图 1-11).

证明

$$\begin{aligned}&A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_nB_n^2\\=&(PA_1^2-PB_1^2)+(PA_2^2-PB_2^2)\\&+\cdots+(PA_n^2-PB_n^2)\\=&(PA_2^2-PB_1^2)+(PA_3^2-PB_2^2)\\&+\cdots+(PA_1^2-PB_n^2)\\=&B_1A_2^2+B_2A_3^2+\cdots+B_nA_1^2.\end{aligned}$$

特别地,对于三角形当点 P 在 A 点时(图 1-12),有

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2.$$

当 C、D 重合时即为勾股定理.

(4) 把三角形向平行四边形推广,可得

定理 1.5 (广义勾股定理)平行四边形对角线的平方和

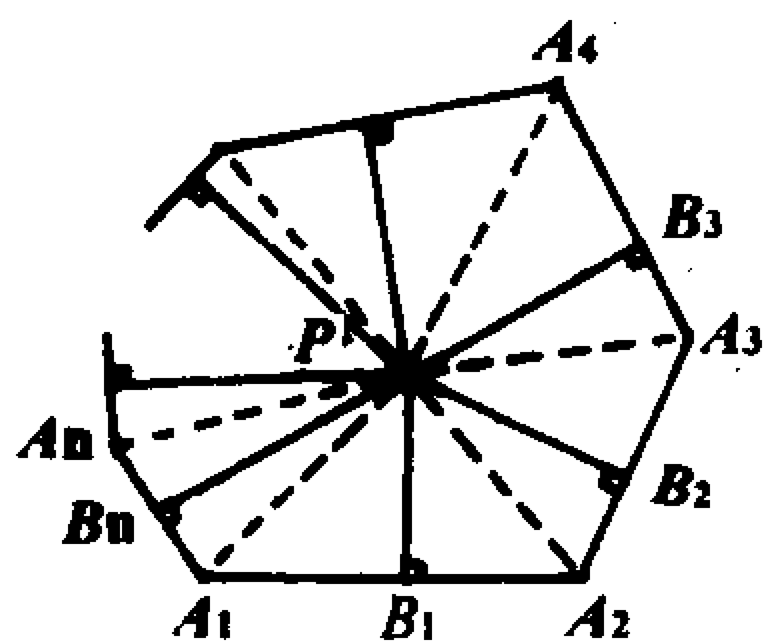


图 1-11

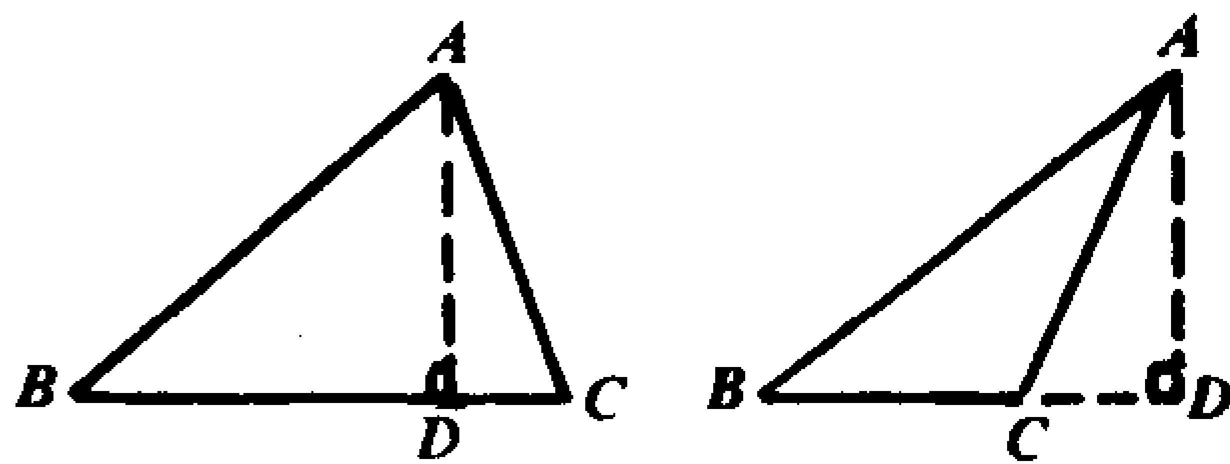


图 1-12

等于它的四边的平方和，即等于相邻两边平方和的二倍.

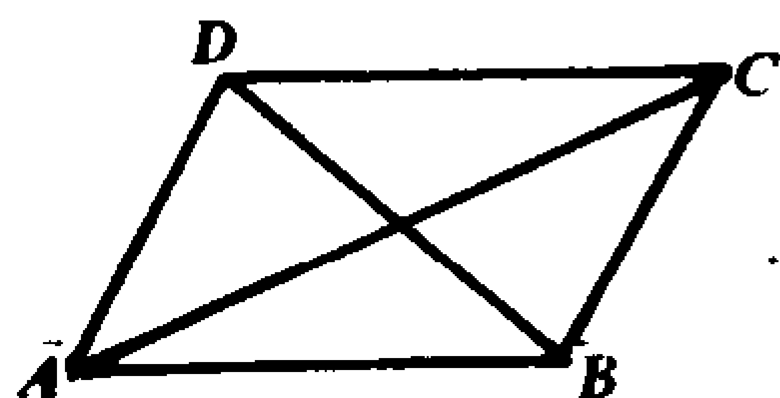


图 1-13

证明　由定理 1.2，有

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC,$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle DAB,$$

因为　$\angle ABC + \angle DAB = 180°$

所以　$\cos\angle DAB = \cos(180° - \angle ABC)$

$$= -\cos\angle ABC.$$

故　$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$.

这就是有名的阿波罗尼斯定理(见第九章).

(5) 向空间推广，可得

定理1.6　设长方体的长、宽、高及对角线的长分别为 p、q、r 及 d，则 $d^2 = p^2 + q^2 + r^2$.

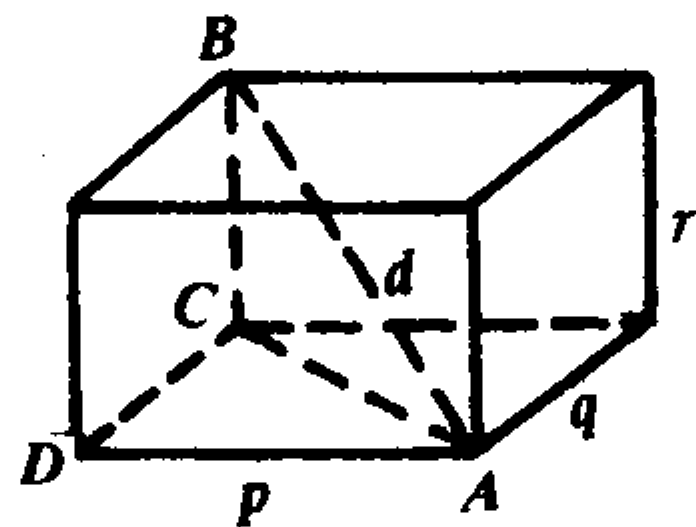


图 1-14

证明　如图 1-14 所设，依题设，有 $BC \perp AC$，$CD \perp DA$，

所以　$d^2 = AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$= AD^2 + DC^2 + BC^2$$

$$= p^2 + q^2 + r^2.$$

定理 1.7　在直四面体 $O\text{-}ABC$ 中，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90°$，$S$ 是顶点 O 所对的面的面积，S_1、S_2、S_3 分别为侧面 $\triangle OAB$、$\triangle OAC$、$\triangle OBC$ 的面积，则

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2.$$

证明　如图 1-15，作 $OD\perp BC$ 于 D，依立体几何知识知，$AD\perp BC$，从而

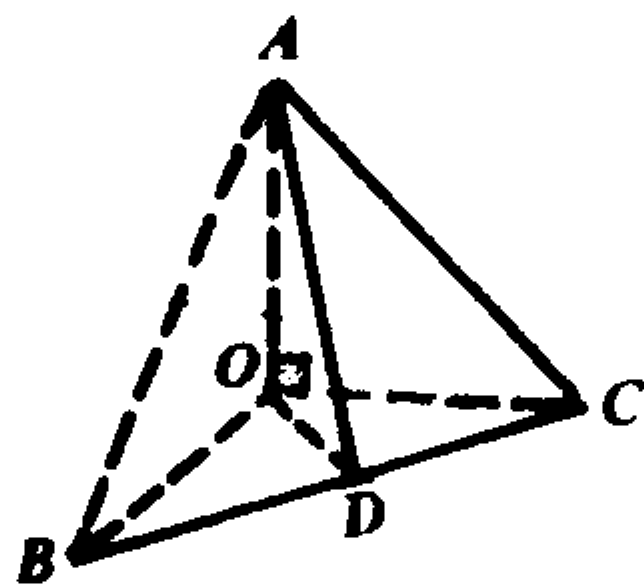


图 1-15

$$\begin{aligned}S^2&=\left(\frac{1}{2}BC\cdot AD\right)^2=\frac{1}{4}BC^2\cdot AD^2\\&=\frac{1}{4}BC^2\cdot(AO^2+OD^2)\\&=\frac{1}{4}(OB^2+OC^2)AO^2\\&\quad+\frac{1}{4}BC^2\cdot OD^2\\&=\left(\frac{1}{2}OB\cdot OA\right)^2+\left(\frac{1}{2}OC\cdot OA\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\cdot OD\right)^2\\&=S_1^2+S_2^2+S_3^2\end{aligned}$$

证毕.

同样，还可以将勾股定理推广到 n 维空间.

§1.4　定理的应用

勾股定理的应用是相当广泛的，我国古代名著《九章算术》(约公元前 100 年前后成书) 的第九章，即最后一章，就专门讨论勾股定理的应用. 前面所给出的变形及推广已构成一庞大的勾股“家族”. 下面略举几个典型的例子谈谈它的应用.

例 1.1　设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 是平面内两点，求 A、B 间的距离 $|AB|$.

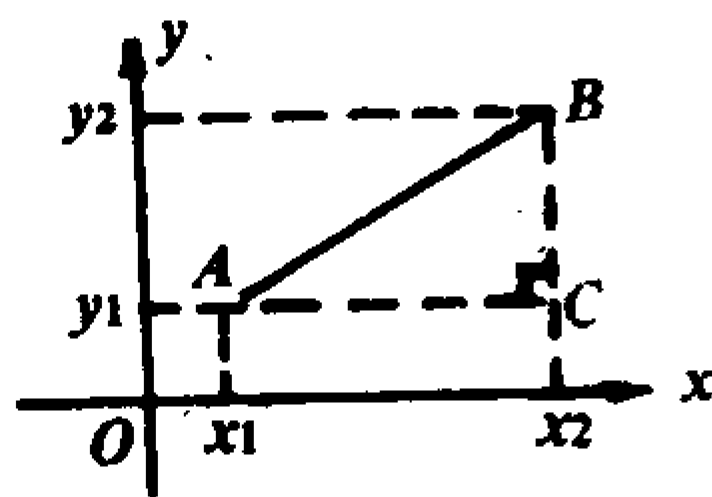


图 1-16

解　如图 1-16，作 $AC\perp BC$，则

$|AC| = |x_2 - x_1|$,同理,

$|BC| = |y_2 - y_1|$,依勾股定理,有

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

此即导出了我们经常要用到的距离公式.

例 1.2 (月牙定理)图 1-17 中是以直角 $\triangle ABC$ 各边为直径所作的三个半圆形,试证明图中两个带阴影的月牙形面积之和等于直角 $\triangle ABC$ 的面积.

图 1-17

证明 因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

所以 $a^2 + b^2 = c^2$.

故有 $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$.

即直角边上两个半圆面积之和等于斜边上半圆的面积.(也可直接应用定理 1.1)

减去公共部分(不带阴影的两弓形)即得结论.

这是希腊医生、数学家希波克拉底斯(Hippocrates,公元前 470 ~ 前 430 年)研究过的一个问题.这一问题的发现,曾给数学家们很大鼓舞,他们想以此来寻求化圆为方的方法,但最终还是一次又一次失败了,直到 1882 年林德曼(Lindemann,1852 ~ 1939 年)证明了 π 的超越性后,才彻底地否定了这个问题.

图 1-18

例 1.3 已知 a、b、c、d 为正实

数，且 $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$，求证 $ac+bd\leqslant 1$.

证明　(加菲尔德构图法)

构造如图 1-18 的直角梯形 $BCDE$ 设 $\angle BAC=\alpha$. 显然 $\text{Rt}\triangle ABE$ 与 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，满足题设

$a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$.

因为　$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+d)(b+c)$，

又　$S_{梯形}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd+\sin\alpha)$$

所以　$(a+d)(b+c)=ab+cd+\sin\alpha$.

即　$ac+bd=\sin\alpha\leqslant 1$(当 $\alpha=90°$ 时取等号).

练习与思考

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，D 是斜边 AB 上任意一点，求证：

$(CD\cdot AB)^2=(AD\cdot BC)^2+(BD\cdot AC)^2$，

并指出勾股定理是其特殊形式.

2. 设 AC 为 $\square ABCD$ 较长的对角线，从 C 引 AB、AD 的垂线 CE、CF，分别与 AB、AD 的延长线交于 E、F. 求证：

$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3, AC=4$，AE 和 BD 分别是 BC 和 AC 边上的中线，且 $AE\perp BD$，求 AB.　($\sqrt{5}$)

4. 已知 a、b、c、d 为正实数，求证：

$ac+bc\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

第二章　光反射定理

2.1　定　　理

光反射定理　若 P、Q 是直线 ST 同侧任意两点，则从 P 到直线再到点 Q 的一切路径中，以通过直线上点 R，使 PR 及 QR 与 ST 的夹角相等的那条路径最短(图 2-1).

有人称此定理为海伦定理. 海伦(Heron，约公元50年)是希腊数学家、工程师. 但上述定理还可以追溯到公元前 300 年左右的欧几里得时期.

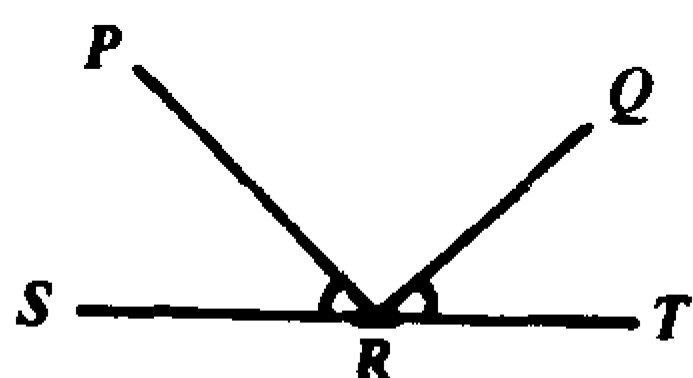


图 2-1

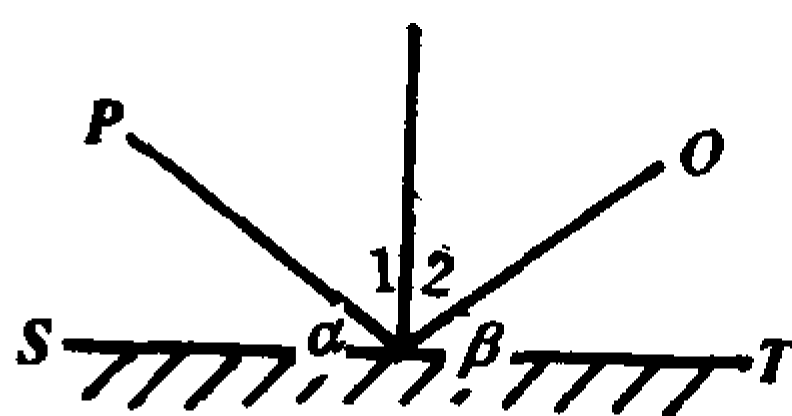


图 2-2

作为几何学家的欧几里得，曾在他的光学著作中给出过光学的一个基本定律，这定律是说入射线与镜面所成的角 α，等于反射线与镜面所成的角 β，现今的普遍说法是 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 1$ 为入射角，$\angle 2$ 为反射角(图 2-2).

海伦在他的《镜面反射》一书中从上述的光学基本定律出发，得出了前面的光反射定理，因此也叫海伦定理.

1775 年意大利数学家法格乃诺(Fagnano) 提出并用微积分方法解决了这样一个有趣的问题：怎样作一个锐角三角形的周长最短的内接三角形？它的结论是：过三角形的垂心 H

向三边作垂线，则垂足三角形就是. 这就是所谓法格乃诺问题. 但这一问题的初等解法以匈牙利数学家费叶(Fejer, 1880 ～ 1958 年) 和德国数学家许瓦尔兹(Schwarz) 给出 的解法最令人称道，他们的解法以简明巧妙闻名于世，有趣的是他们的解法都用到了海伦定理.

§2.2 定理的证明

这里我们证明海伦定理，法格乃诺问题将在本章末解决.

证明 如图 2-3 所设，P' 为 P 关于 ST 的对称点，R' 为 ST 上任意点，则 $PR = P'R$，$\angle\alpha = \angle\gamma$，又 $\angle\alpha = \angle\beta$，故 P'、R、Q 共线，据"三角形两边之和大于第三边"，有

$$PR + RQ = P'R + RQ = P'Q \leqslant P'R' + R'Q = PR' + R'Q.$$

顺便指出，其逆命题也成立.

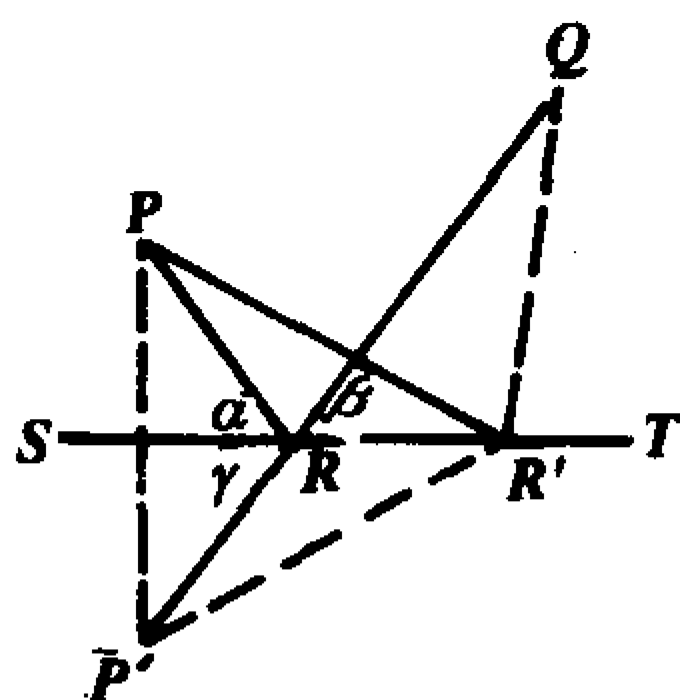


图 2-3

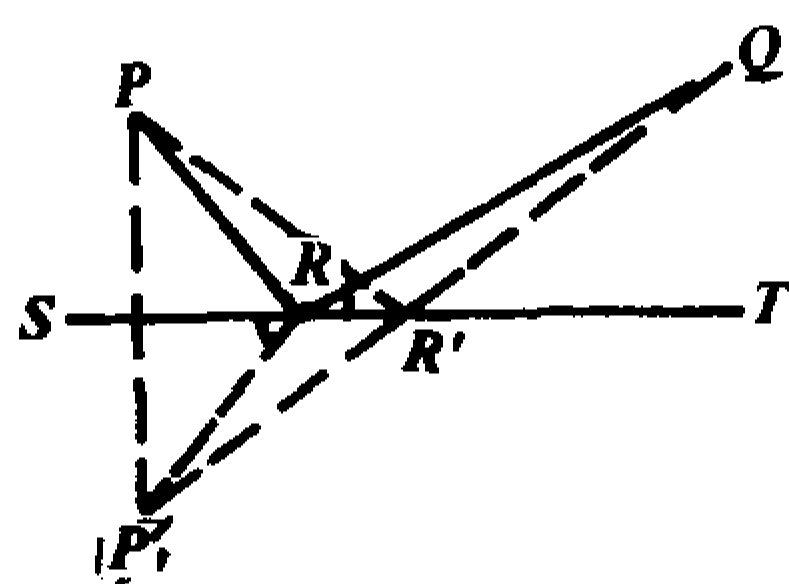


图 2-4

逆定理 若 P、Q 为直线 ST 同侧两点，R 为 ST 上一动点，则当 $PR + RQ$ 最短时，必有 $\angle PRS = \angle QRT$.

证明 如图 2-4. 设 P 关于 ST 的对称点为 P'，则 $\angle PRS = \angle P'RS$，若 $\angle PRS \neq \angle QRT$，则

$PR + RQ = P'R + RQ$ 为折线.

连 $P'Q$，设与 ST 交于 R'，则

$PR' + R'Q = P'R' + R'Q = P'Q < P'R + RQ = PR + RQ$.

这与 $PR + RQ$ 为最短相矛盾. 故必有 $\angle PRS = \angle QRT$.

§2.3 定理的推广

定理2.1 设 P、Q 为直线 ST 同侧两点，点 A、B 是 ST 上两动点，且 $AB = a$，则从点 P 到 A 到 B 再到 Q 的一切路径中，以当 $\angle PAS = \angle QBT$ 时路径最短.

证明 如图 2-5，作 $\square ABQQ'$，则 $\angle Q'AB = \angle QBT = \angle PAS$，所以 $PA + AQ'$ 为从 P 到 ST 再到 Q' 的最短路径. 从而 $PA + AQ' + Q'Q = PA + AB + BQ$ 为最短路径.

定理2.2 若 P 为锐角 $\angle XOY$ 内一定点，M、N 分别为 OY、OX 上两动点，则 $PM + MN + NP$ 当 $\angle PMY = \angle NMO$、$\angle MNO = \angle PNX$ 时为最短(图 2-6).

定理2.3 若 P、Q 是锐角 $\angle XOY$ 内两定点，M、N 分别为 OY、OX 上两动点，则 $PM + MN + NQ$ 当 $\angle PMY = \angle NMO$、$\angle MNO = \angle QNX$ 时为最短.

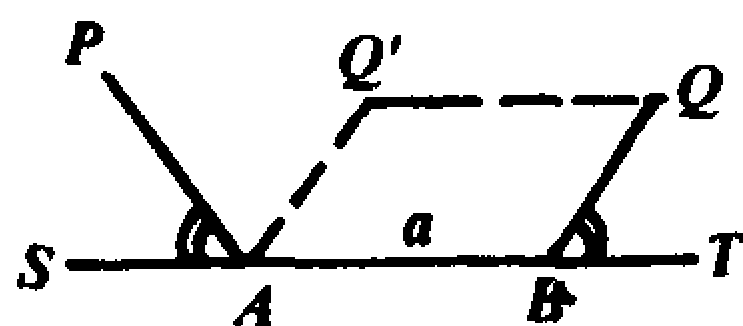


图 2-5

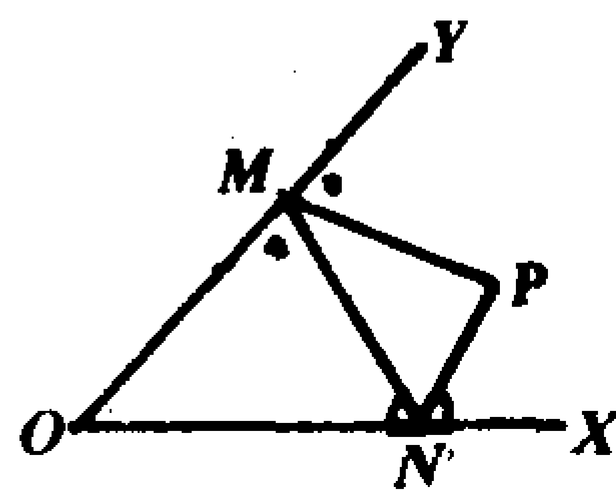


图 2-6

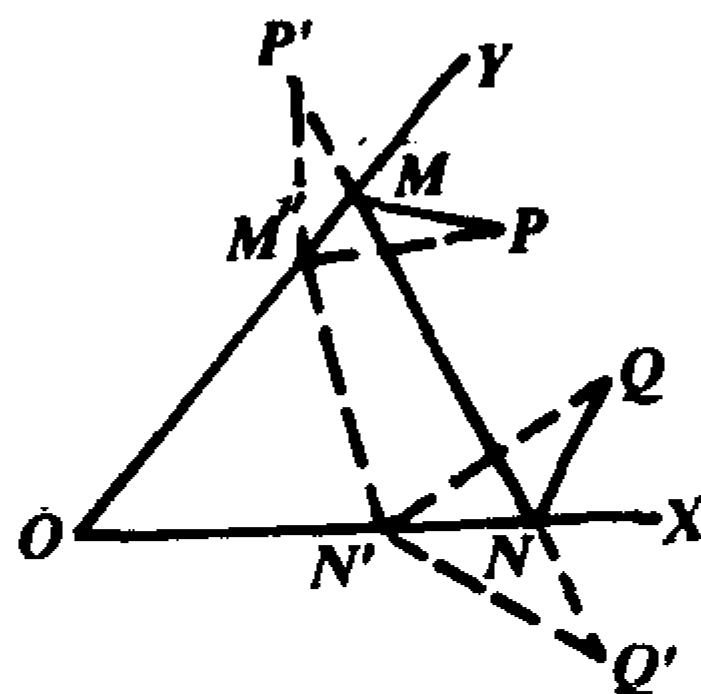


图 2-7

证明 如图 2-7 所示，分别作 P、Q 关于 OY、OX 的对

称点 P'、Q'，由 $\angle PMY = \angle NMO$、$\angle MNO = \angle QNX$，可得 P'、M、N、Q' 共线，从而有

$$PM + MN + NQ = P'Q'.$$

设 M'、N' 为 OY、OX 上任意两点，则

$$PM' + M'N' + N'Q = P'M' + M'N' + N'Q' \geqslant P'Q' = PM + MN + NQ.$$

命题得证.

特别地当 P、Q 重合时，即为定理 2.2.

由定理 2.1、定理 2.3，还可得到

定理 2.4 若 P、Q 为锐角 $\angle XOY$ 内两定点，A、B 为 OY 上两动点，C、D 为 OX 上两动点，且 $AB = a$，$CD = b$，则

$$PA + AB + BC + CD + DQ$$

当 $\angle PAY = \angle CBO$、$\angle BCO = \angle QDX$ 时为最短.

证明 如图 2-8，作 $\square PABP'$、$\square CDQQ'$，依定理 2.3，则可得 $P'B + BC + CQ'$ 为从点 P' 到 OY 上一点再到 OX 再到 Q' 的最短路径. 从而 $PA + AB + BC + CD + DQ$ 为最短路径.

将 $\angle XOY$ 推广到凸折线，还可得

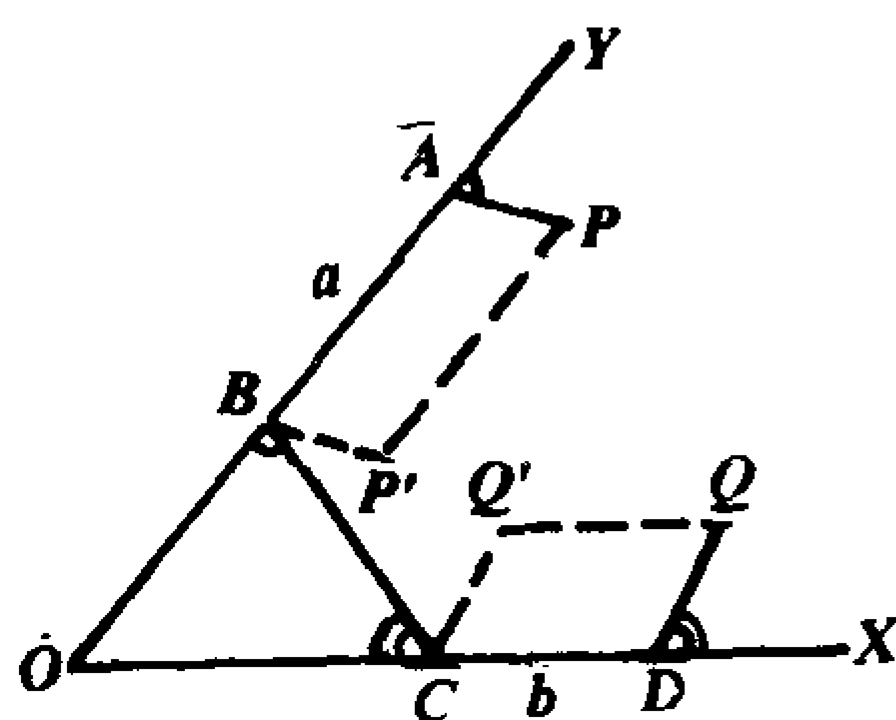


图 2-8

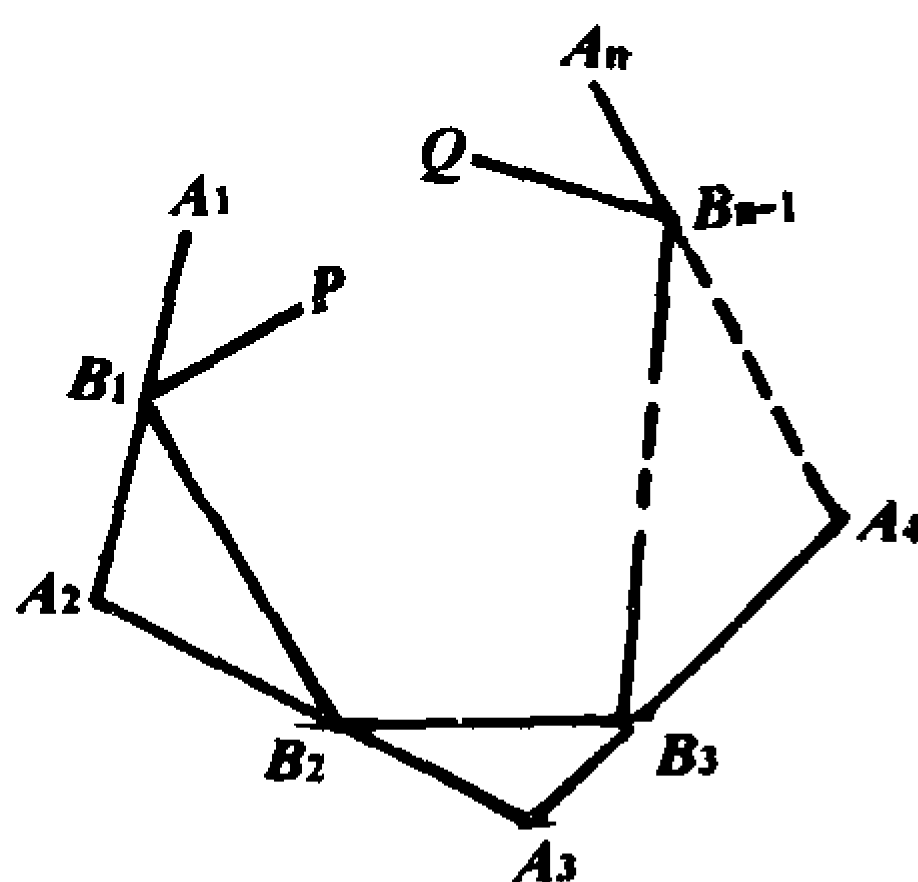


图 2-9

定理2.5 （如图2-9）若P、Q为凸折线$A_1A_2\cdots A_n$内两定点，B_1、B_2、$\cdots$、B_{n-1}分别是A_1A_2、A_2A_3、$\cdots$、$A_{n-1}A_n$上的动点，则$PB_1+B_1B_2+B_2B_3+\cdots+B_{n-1}Q$当$\angle PB_1A_1=\angle B_2B_1A_2$、$\angle B_1B_2A_2=\angle B_3B_2A_3$、$\cdots$、$\angle B_{n-2}B_{n-1}A_{n-1}=\angle A_nB_{n-1}Q$时最短.

证明仿上，从略.

定理2.6 设M、N分别为两平行线AB、CD上两动点，$MN\perp AB$，P、Q为直线AB、CD外侧两定点（如图2-10），则$PM+MN+NQ$当$\angle PMA=\angle QND$时为最短.

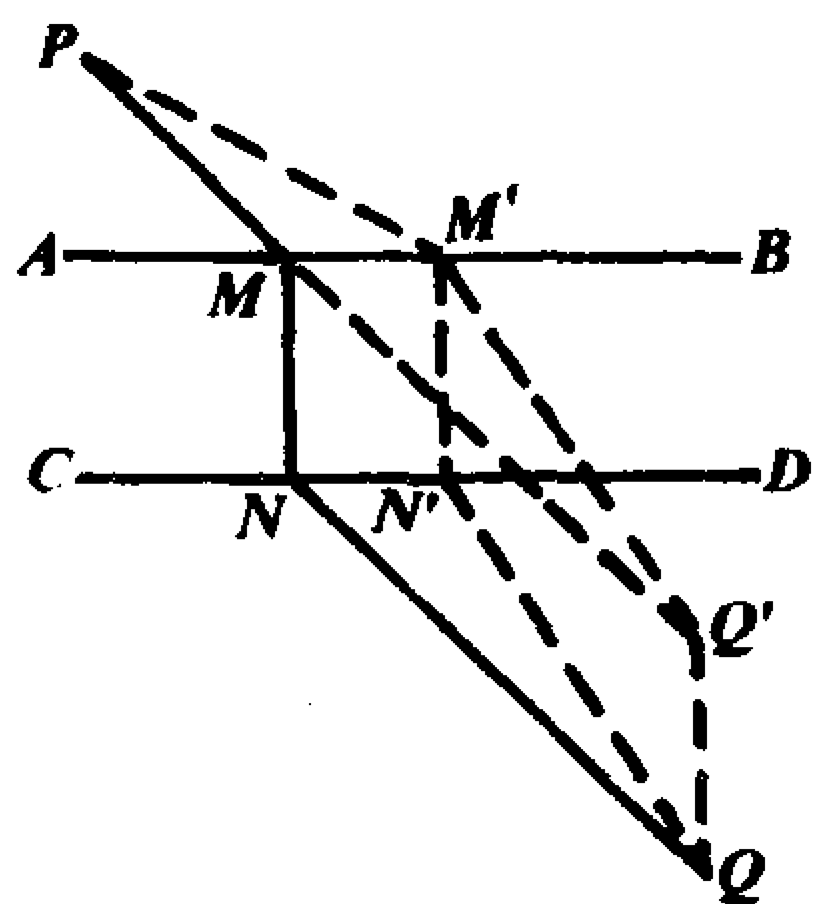


图 2-10

证明 作$QQ'\perp CD$，使$QQ'=MN$，则$MNQQ'$为平行四边形，又$AB\,/\!/\,CD$，$\angle PMA=\angle QND$，

$\therefore$ P、M、Q'、共线.

设$M'N'$为AB、CD的任一公垂线段，则

$PM'+M'N'+N'Q$

$=PM'+M'Q'+Q'Q\geqslant PQ'+Q'Q=PM+MN+NQ$，证毕.

值得指出的是，定理2.1～定理2.6的逆命题均成立.即有

定理2.1′ 设P、Q为直线ST同侧两点，点A、B是ST上两动点，且$AB=a$，则当$PA+AB+BQ$最短时，必有$\angle PAS=\angle QBT$（图2-5）.

定理2.2′ P为锐角$\angle XOY$内一定点，M、N分别为OY、OX上两动点，则当$PM+MN+NP$最短时必有$\angle PMY=\angle NMO$、$\angle MNO=\angle PNX$（图2-6）.

定理2.3′ P、Q为锐角$\angle XOY$内两定点，M、N分别为

OY、OX 上两动点，则当 $PM + MN + NQ$ 最短时必有 $\angle PMY = \angle NMO$、$\angle MNO = \angle QNX$（图 2-7）.

定理 2.4′ P、Q 为锐角 $\angle XOY$ 内两定点，A、B 为 OY 上两动点，C、D 为 OX 上两动点，且 $AB = a$，$CD = b$ 图 (2-8)，则当 $PA + AB + BC + CD + DQ$ 最短时，必有 $\angle PAY = \angle CBO$、$\angle BCO = \angle QDX$.

定理 2.5′ 若 P、Q 为凸折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 内两定点，B_1、B_2、…、B_{n-1} 分别是 A_1A_2、A_2A_3、…、$A_{n-1}A_n$ 上的动点（图 2-9），则当 $PB_1 + B_1B_2 + \cdots + B_{n-1}Q$ 最短时，必有

$\angle PB_1A_1 = \angle B_2B_1A_2$、$\angle B_1B_2A_2 = \angle B_3B_2A_3$、…、$\angle B_{n-2}B_{n-1}A_{n-1} = \angle A_nB_{n-1}Q$.

定理 2.6′ 若 M、N 分别为两平行线 AB、CD 上两动点，且 $MN \perp AB$，P、Q 为直线 AB、CD 外侧两定点（图 2-10），则当 $PM + MN + NQ$ 最短时，必有 $\angle PMA = \angle QND$（图 2-10）.

上述定理的证明可仿海伦定理逆定理的证明，留读者自己给出.

最后我们给出海伦定理向二次线段的一个推广：

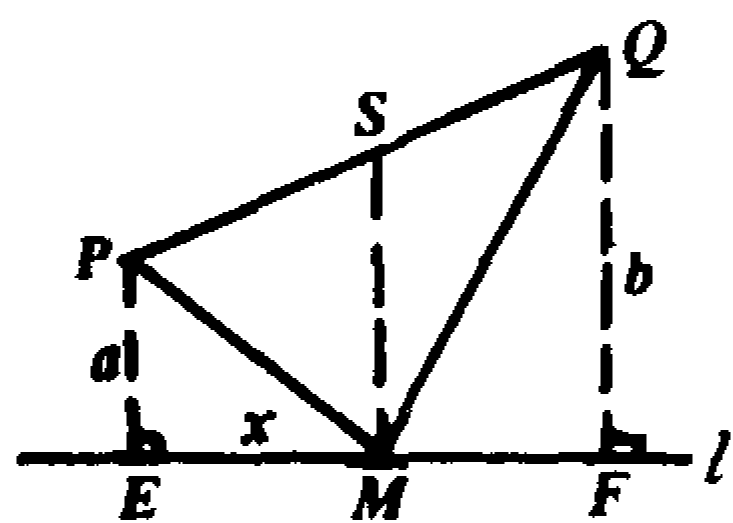


图 2-11

定理 2.7 若 P、Q 为两定点，l 为定直线，过 PQ 中点 S 作 $SM \perp l$ 于 M，则 M 为 l 上唯一的使 $PM^2 + MQ^2$ 为最小的点.

证明 如图 2-11，作 $PE \perp l$、$QF \perp l$，E、F 为垂足，并设 $PE = a$、$QF = b$、$EF = c$、$EM = x$，则 a、b、c 为定值.

$$PM^2 + QM^2 = a^2 + x^2 + b^2 + (c - x)^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2\left[\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4}\right].$$

显然当且仅当 $x = \frac{c}{2}$ 时(即 M 唯一),$PM^2 + MQ^2$ 为最小.

§2.4 定理的应用

例2.1 在一条笔直的公路 l 同侧有两家工厂 A、B,现要在公路(l)上设一汽车站,问汽车站设在什么地方,才能使这两家工厂到汽车站的距离之和最短?

解 如图2-12,作点 A 关于 l 的对称点 A',连 $A'B$ 交 l 于 C,则 $\angle 1 = \angle 2$,由海伦定理,当在点 C 处建汽车站时,能使 $AC + CB$ 最短.

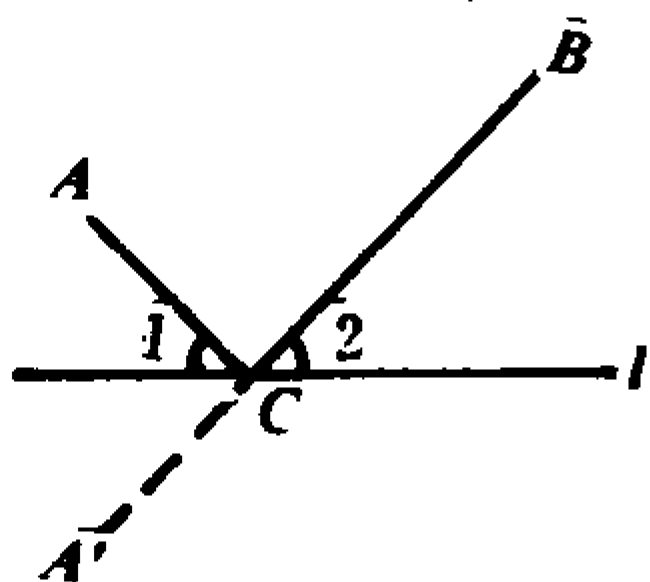


图 2-12

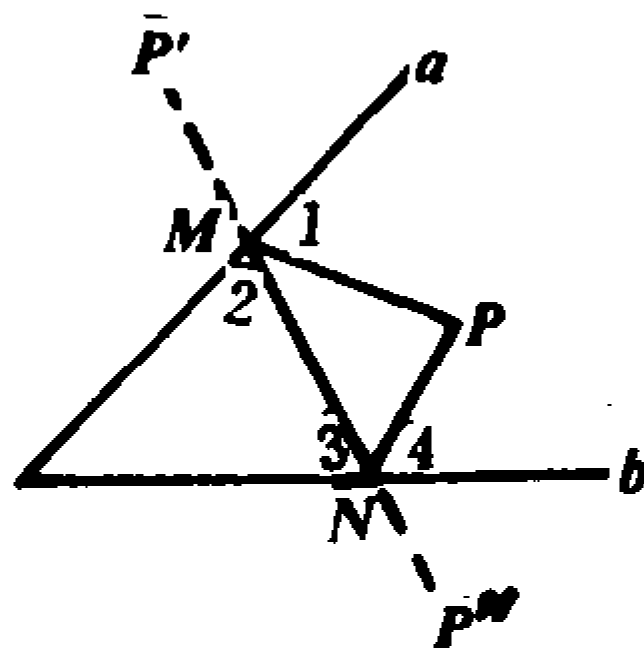


图 2-13

例2.2 如图2-13,a、b 为两交叉成锐角的公路,在公路 a、b 间有一邮局 P,现要在公路 a、b 上各安装一邮筒,问这两邮筒放在什么地方,才能使邮递员从邮局 P 到公路 a 边的邮筒取信后,再到公路 b 边的邮筒取信,然后回到邮局 P 所走的路径最短?

解 作点 P 关于直线 a 的对称点 P',关于 b 的对称点 P'',

连 $P'P''$ 分别交 a、b 于 M、N，连 PM、PN，则有 $\angle 1 = \angle 2$、$\angle 3 = \angle 4$，由定理 2.2，则 $PM + MN + NP$ 为最短路径，故邮筒应分别安装在点 M、N 处.

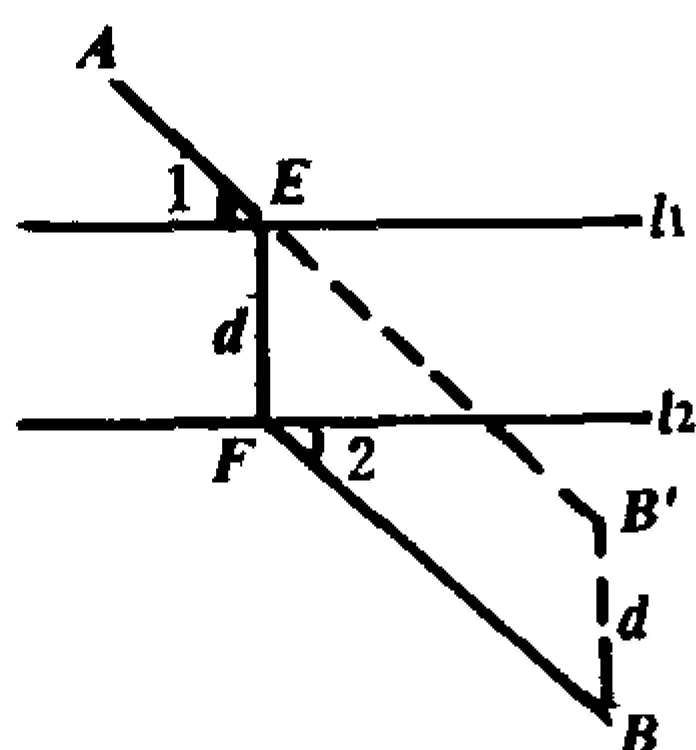


图 2-14

例 2.3 一条河两岸分别有村庄 A 和 B，现要在河上建一座桥，问桥应建在什么地方，才能使从 A 到 B 所走的路径最短？

解 如图 2-14 所设，d 为河宽，作 $BB' \perp l_2$；且使 $BB' = d$，连 AB' 交 l_1 于 E，作 $EF \perp l_2$ 于 F. 连 FB，可得 $\angle 1 = \angle 2$，由定理 2.6，在 EF 处建桥时，可使 A 到 B 的路径最短.

例 2.4 在 $\square ABCD$ 的 AB 上有一定点 K，以 K 为顶点作 $\square KLMN$，使 L、M、N 各在 BC、CD、AD 上，且使 $\square KLMN$ 周长最短.

作法 如图 2-15. 作 K 关于 AD 的对称点 K'，设 $\square ABCD$ 的中心为 O，连 KO 交 CD 于 M，连 $K'M$ 交 AD 于 N，连 NO 交 BC 于 L，则四边形 $KLMN$ 为所求.

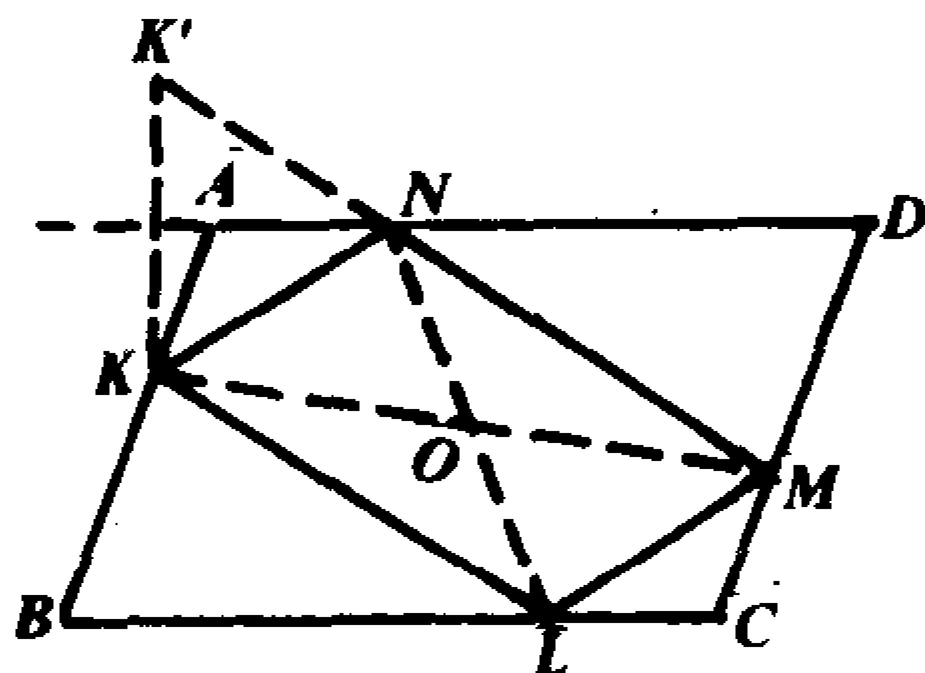


图 2-15

证明 据中心对称图形易知四边形 $KLMN$ 为平行四边形，欲证 $\square KLMN$ 周长最短，只要证半周长 $KN + NM$ 最短即可，K、M 为 AD 同侧两点，由海伦定理即得结论.

最后我们来解决法格乃诺问题.

例 2.5 在锐角三角形中，作周长最短的内接三角形.

首先我们介绍费叶的解法. 这是 1900 年他还是柏林的一个学生时发现的.

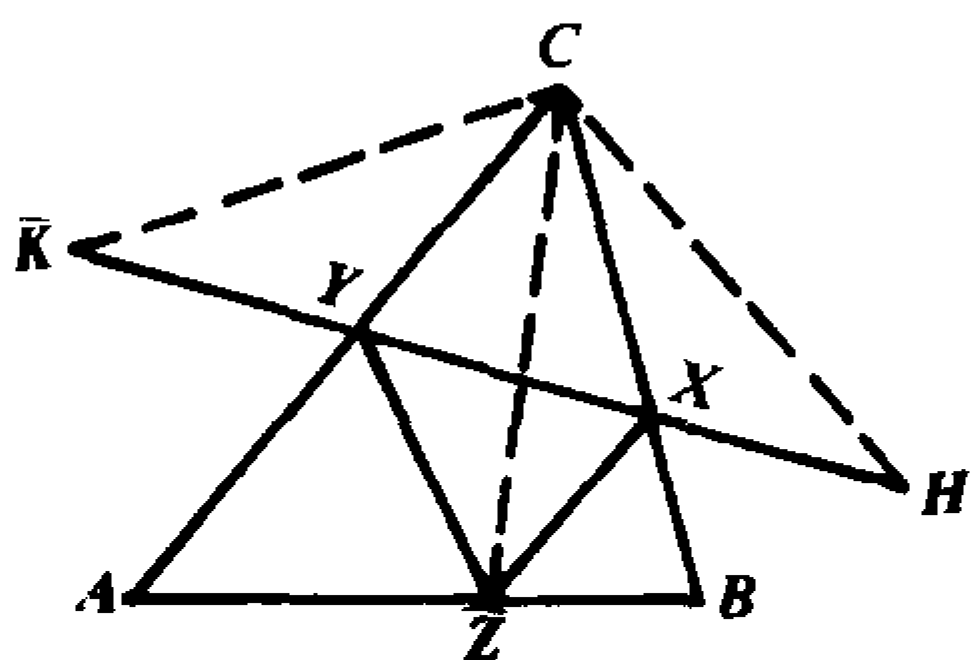


图 2-16

解法1 如图 2-16，设 Z 是 AB 上任一定点，作 Z 关于 AC、CB 的对称点 K、H，连 KH 交 AC、BC 于 Y、X，则 $\triangle XYZ$ 是以定点 Z 为顶点的周长最小的内接三角形(据定理 2.2)，且周长为线段 KH.

但由于 K、Z，H、Z 分别关于 CA、CB 对称，所以 $CH = CZ = CK$，$\angle HCB = \angle BCZ$，$\angle KCA = \angle ACZ$，从而 $\angle KCH = 2\angle ACB$ 为定角. 由余弦定理，有 $KH^2 = 2CZ^2(1-\cos 2\angle ACB)$，所以当 CZ 最小时，KH 也最小，即 $\triangle XYZ$ 周长取最小值. 而当 $CZ \perp AB$ 时 CZ 为最小，同理当 $AX \perp BC$、$BY \perp AC$ 时，$\triangle XYZ$ 周长最小，于是得出结论：在锐角三角形的所有内接三角形中，以垂足三角形的周长最小.

许瓦尔兹的解法(解法 2) 别出心裁.

解法2 将 $\triangle ABC$ 依次以 AC、$B'C$、$A'B'$、$A'C'$、$B''C'$、为轴连续施行五次对称变换，得到图 2-17，因垂足 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 每一边所构成的两角都相等，由对称性知，$\triangle XYZ$ 通过依次对称翻转展成直线 ZZ'，且其周长的 2 倍等于 ZZ'.

设 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的任一内接三角形，则通过对称翻转 $\triangle DEF$ 各边依次展成折线 FF'(图 2-17 中以 F、F' 为端点的点划线)，且 $\triangle DEF$ 周长的 2 倍等于折线 FF' 的长度.

又 $\angle AZZ' = \angle ZZ'B''$，故 $AB \,/\!/\, A''B''$，从而四边形 $FZZ'F'$ 为平行四边形，有 $ZZ' = FF' \leqslant$ 折线 FF'，即

$$2\triangle XYZ \text{ 的周长} \leqslant 2\triangle DEF \text{ 的周长},$$

$$\triangle XYZ \text{ 的周长} \leqslant \triangle DEF \text{ 的周长}.$$

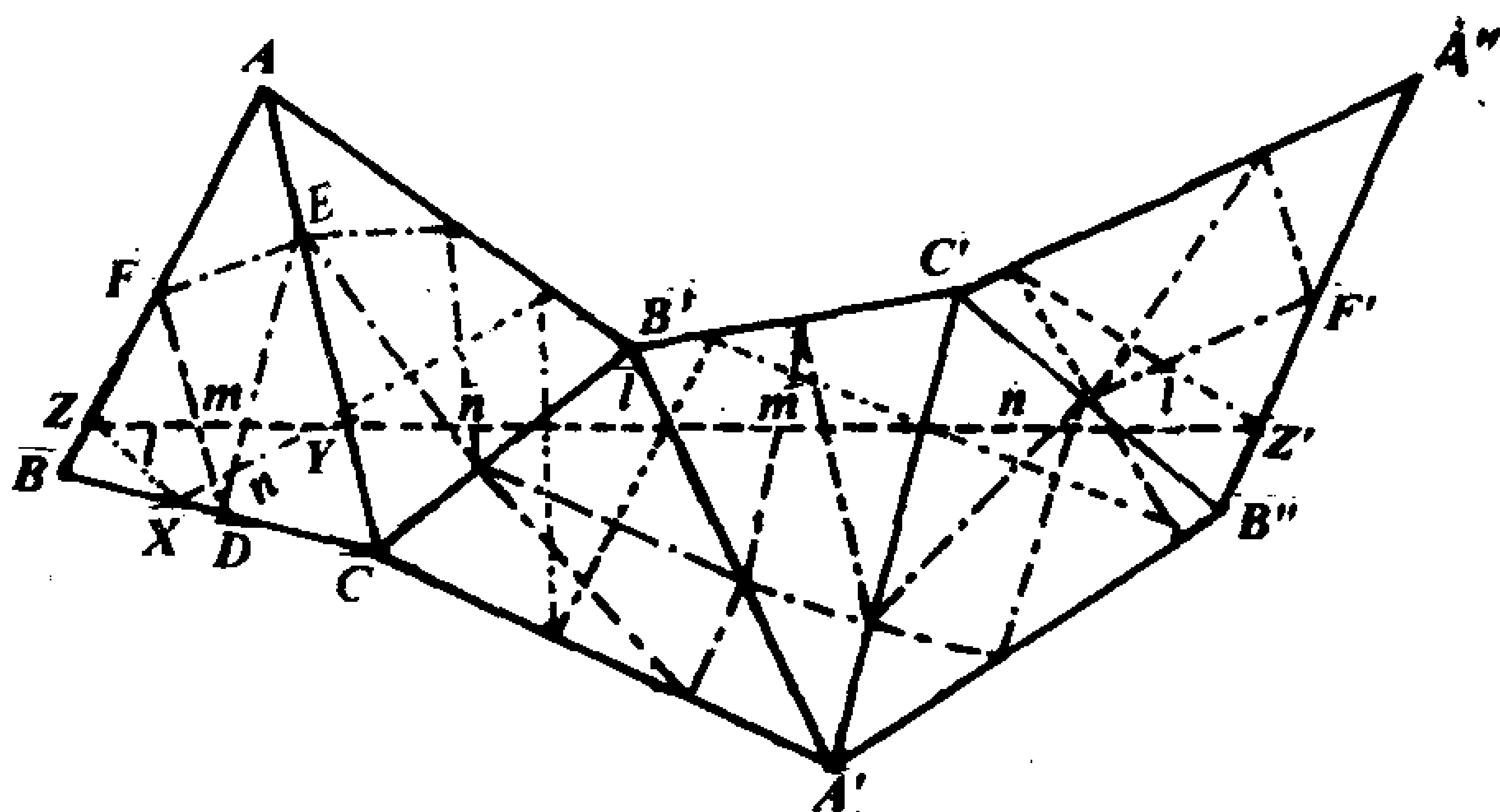


图 2-17

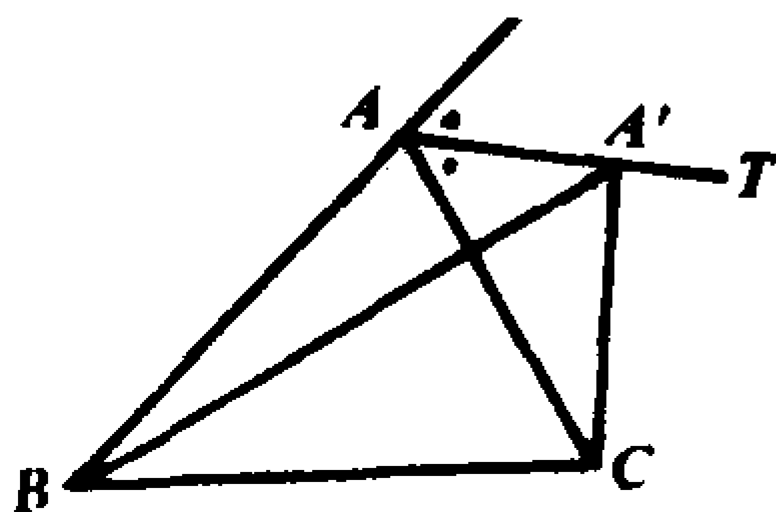
所以在锐角三角形的所有内接三角形中，以垂足三角形周长最短.

许瓦尔兹的解法是值得回味的，他的这种方法被莫利（见第二十章）在 1933 年推广到 $2n+1$ 边形的情形.

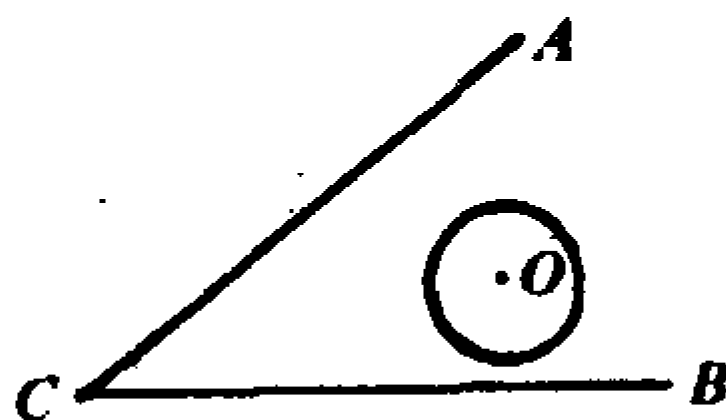
练习与思考

1. 证明：在同底等高的三角形中，以等腰三角形的周长为最小.

2. 如图，A' 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线 AT 上的任意一点，



（第2题）



（第3题）

证明：$A'B + A' \geqslant AB + AC$. 3. $\odot O$ 为锐角 $\angle ACB$ 内一定圆，在 $\odot O$、CA、CB 上分别求出一点 P、Q、R，使从 P 到 Q 到 R 再到 P 的路径最短.

第三章　黄金分割

§3.1　定　　义

黄金分割　把一线段分成两段，使其中较大的一段是原线段与较小一段的比例中项，叫做把这条线段黄金分割.

如图 3-1，C 为线段 AB 上一点，如果有$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$，则点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点. 设 $AB=1$，$AC=x$，则$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}$，解之得

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618033989\cdots$$



图 3-1

称之为黄金比，也叫中末比、中外比、黄金率. 我国古代称为弦分割，黄金比的数值$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx$ 0.618033989…(以下记为 ω)，后人还称为黄金数. 古希腊柏拉图(Plato，公元前 427 ～ 前 349 年) 学派的欧多克斯(Eudoxus，约公元前 408 ～ 前 335 年) 曾深入研究过黄金分割问题，德国著名天文学家、数学家开普勒(Kepler，1571 ～ 1630 年) 把它与勾股定理并列，誉为古希腊几何学的两颗明珠，可见黄金分割地位之赫然.

黄金分割是欧洲文艺复兴时期，由意大利著名艺术家、科学家达・芬奇(Devinci，1452 ～ 1519 年) 冠以的美称. 它在美学、艺术、建筑和日常生活方面有着广泛的应用. 如埃及的金

字塔、印度的泰姬陵以至法国的埃菲尔铁塔上，都可发现与黄金比有联系的数据. 再如现今印刷的各种书籍、图片，门窗，桌面其长宽之比大多接近黄金比，这样制作，美观、大方，材料最省；在高塔的黄金分割点处建造楼阁或设置平台，能使瘦削单调的塔身变得壮观；在摩天大厦的黄金分割点处加道腰线或装饰物，会使整个大厦显得雅致；二胡演奏中的"千金"分弦，若符合黄金比，音调最和谐；独唱演员站在舞台的黄金分割点，给人感觉最适宜，音响效果最好. 人体也符合黄金比，若人的肚脐是人体总长的黄金分割点，膝盖是肚脐到脚跟的黄金分割点，则其身材最匀称，古希腊的智慧女神雅典娜和太阳神阿波罗的塑像都采用这种身段比.

我国早在战国时期就已知道并能应用黄金分割，长沙马王堆汉墓出土的文物中，有的长宽就是按黄金比制作的.

13 世纪初意大利数学家斐波那契(Fibonacci，1170 ～ 1250 年) 研究过这样一个有趣问题："兔子出生以后两个月就能每月生小兔，若每次不多不少恰好生一对(一雌一雄)，假如养了初生的小兔一对，试问一年以后共有多少对兔子(假设生下的小兔都成活的话)". 如果我们把每月的兔子(对) 数排成一列数，即得数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\cdots,a_n,\cdots$$

有趣的是，比值$\frac{a_n}{a_{n+1}}$当 n 无限增加时，就得到黄金比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

树枝的生长也满足黄金比，这是数学家泽林斯基在一次国际数学会议上提出的：$\frac{\text{第}\,n\,\text{年后的树枝}}{\text{第}\,n+1\,\text{年后的树枝}}$趋于黄金比. 又如在蜂房结构、菠萝的鳞片、向日葵子排列等问题中，都可找到

与黄金数的联系.

随着生产和科学试验的需要，近 40 年来黄金分割在优选法中开辟了它的应用领域. 在单因素优选法中，利用黄金数 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（或其倒数 $\frac{1}{\omega}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$）逐次安排试验点，可以减少试验次数，并迅速可靠地搜索到符合生产要求的试验点，这可说是黄金分割绽开的又一朵新花!

§3.2 黄金分割的几何作法

已知线段 AB，怎样作它的黄金分割点?下面的作法由欧多克斯给出

如图 3-2，作 $BD\perp AB$，使 $BD=\frac{1}{2}AB$，连 AD;

在 AD 上截取 $DE=BD$;

在 AB 上截取 $AC=AE$，则 C 就是所求作的黄金分割点.

证明 因为 $AD=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot AB=\frac{\sqrt{5}}{2}AB.$

$AC=AE=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)AB$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB, BC=\frac{3-\sqrt{5}}{2}AB.$

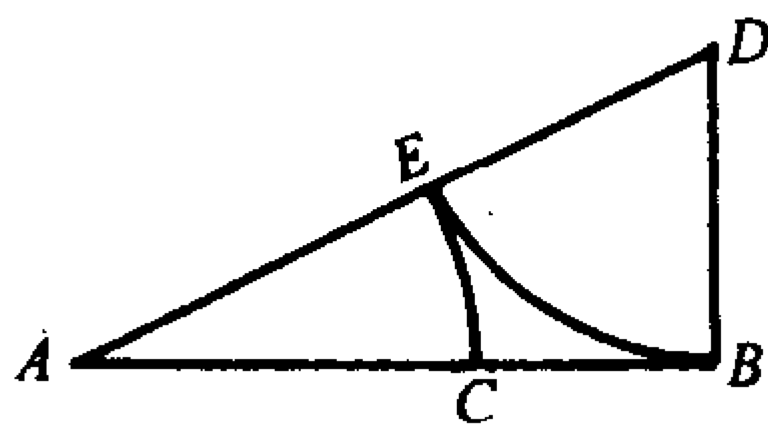


图 3-2

因为 $\frac{BC}{AC}=\frac{(3-\sqrt{5})\frac{AB}{2}}{(\sqrt{5}-1)\frac{AB}{2}}=$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{AC}{AB}.$

所以 C 为 AB 的黄金分割点.

§3.3 黄金数的各种趣式

1. $\omega=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$.

证明 设 $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}=x$, 则 $\frac{1}{1+x}=x$,故有

$x^2+x-1=0$. $x>0$, $x=\omega$.

2. $\omega=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}},(0<a<1)$.

证明 设 $\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots\sqrt{1-a}}}=x$,则 $x>0$,两边平方得 $x^2+x-1=0$,故 $x=\omega$.

3. $\omega=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}}$.

证明 设 $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots}}}}=x$, 则 $\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$,两次平方化简得

$x^4-4x^2-x+2=0$,即

$$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0.$$

易见 $x\neq-1$, $x\neq2$,故 x 满足 $x^2+x-1=0$,从而 $x=\omega$.

4. $\omega=2\cdot\sin18°$.

只要能求出 $\sin18°$ 的值即可得出结论.(略)

5. 顶角为 36° 的等腰三角形,底与腰之比等于 ω.

证明 如图 3-3,作 $\angle C$ 的平分线

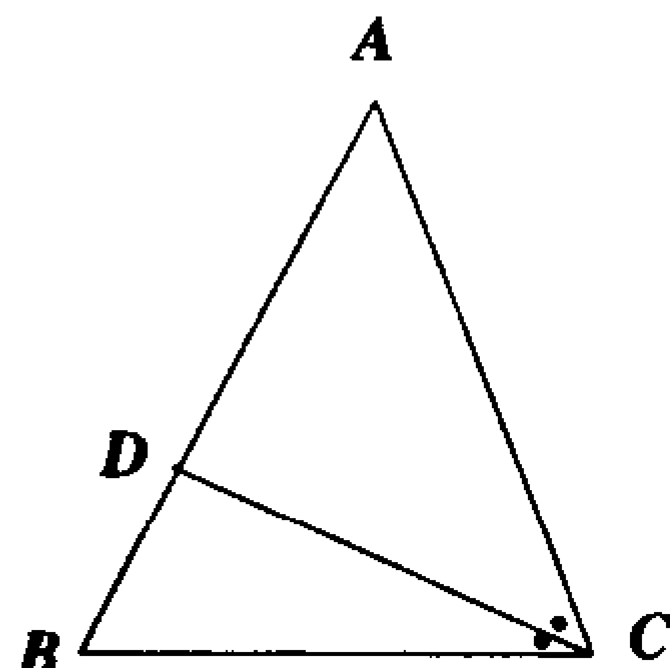


图 3-3

CD,交 AB 于 D,则 $\angle BCD=\angle ACD=36°$,从而 $BC=CD=AD$,$\triangle ABC \backsim \triangle CDB$,

所以$\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$,将 $BC=AD$ 代入,

即得　$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{AB}=\omega$,故$\frac{BC}{AB}=\omega$.

6. 底角为 72° 的等腰梯形,若上底等于腰,则上下底之比等于 ω.

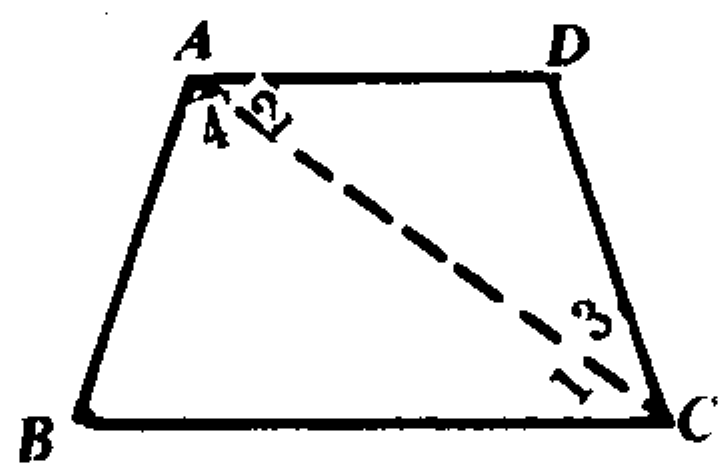


图 3-4

证明　图 3-4,

因为　$\angle B=\angle BCD=72°$

又　$AD \parallel BC$,$AD=CD$,

所以　$\angle 1=\angle 2$,$\angle 2=\angle 3$,

得　$\angle 1=\angle 3=36°$,　从而　$\angle 4=72°$,

所以　$\triangle CAB$ 为顶角等于 36°的等腰三角形. 由结论 5得 $\frac{AD}{BC}=\frac{AB}{BC}=\omega$.

7. 正五边形的边与对角线之比等于 ω.

略证　正五边形的五条对角线相等且构成一五角星形,且不难求得五星顶角为36°,如图3-5中$\triangle ACD$就是一顶角为36° 的等腰三角形,依结论 5 有$\frac{CD}{AC}=\omega$.

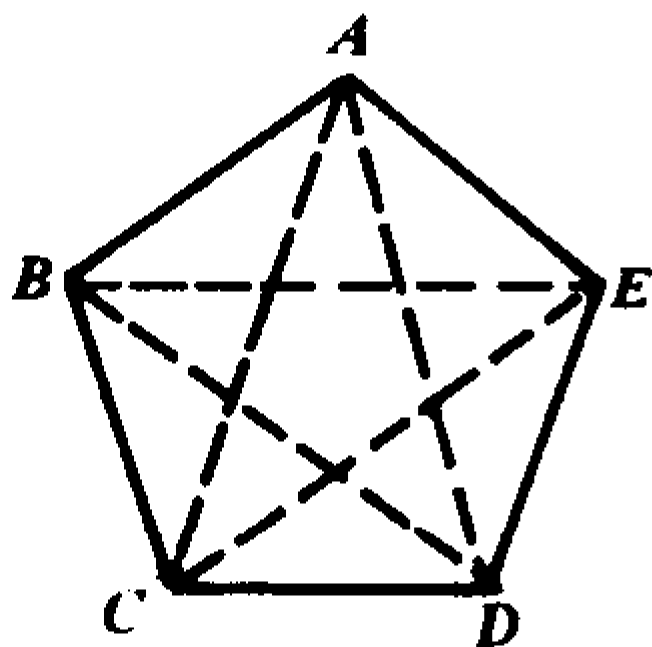


图 3-5

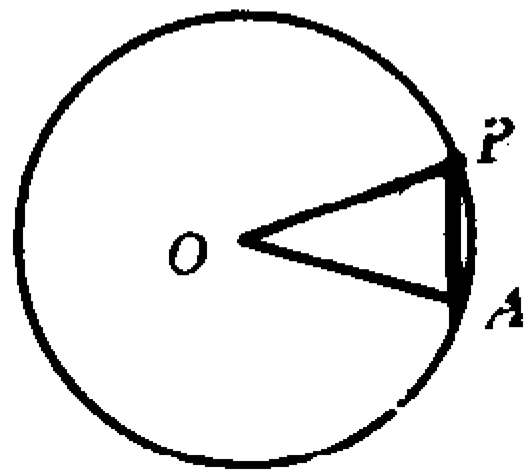


图 3-6

8. 单位圆中内接正十边形边长等于 ω.

证明 如图 3-6,设 AB 是单位圆内接正十边形的边长,则 $\triangle AOB$ 为顶角等于 36° 的等腰三角形,故有$\frac{AB}{OA}=AB=\omega$.

9. 在正五角星中(如图 3-7),每边长短不等的线段有四种(如 NM、BN、BM、BE),它们满足

$$\frac{MN}{BN}=\frac{BN}{BM}=\frac{BM}{BE}=\omega$$

提示 利用结论 5 及 $\triangle AME \backsim \triangle BAE$ 证 N 为 BM 的黄金分割点,M 为 BE 的黄金分割点.

正五角星与其外接正五边形,可组成 20 个大大小小的顶角为 36° 的等腰三角形,存在数十对比值为黄金数的线段,真可谓一颗五彩缤纷的金星!

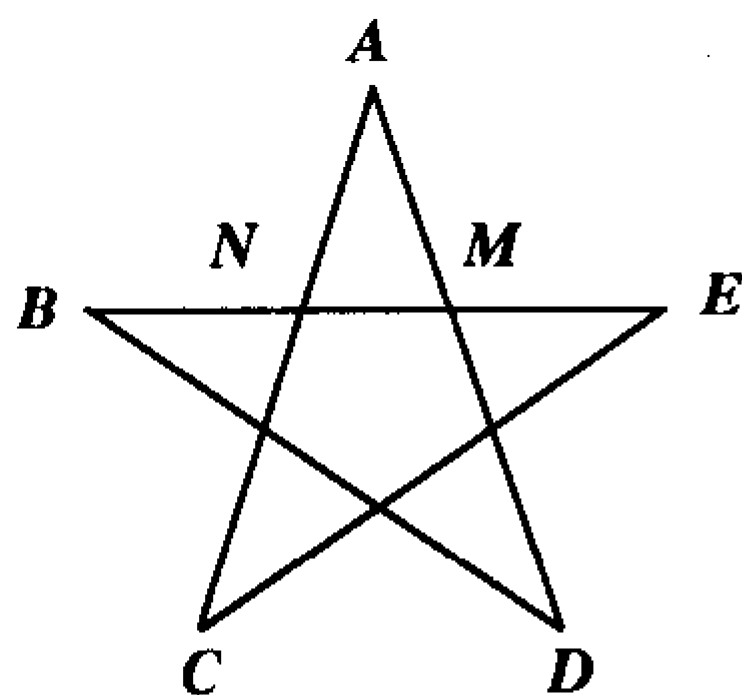


图 3-7

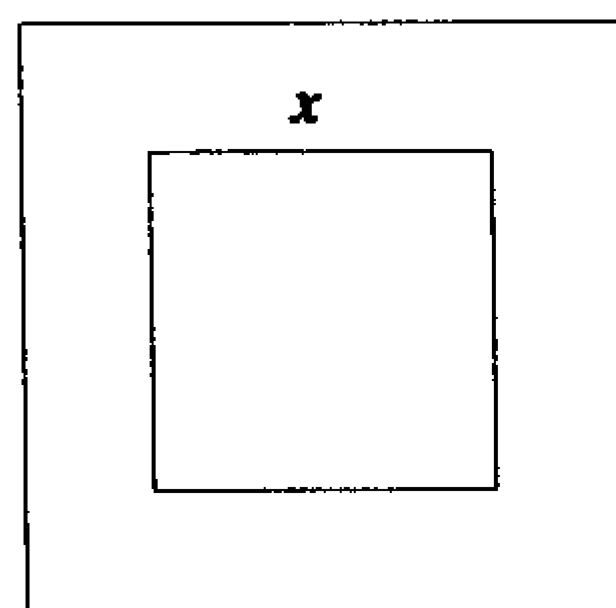


图 3-8

10. 在单位正方形中挖去一小正方形,使小正方形的面积等于剩下部分的面积的平方,则小正方形的边长为 ω.

证明 如图 3-8,设小正方形边长为 x,则

$$x^2=(1-x^2)^2$$

$$x^4-3x^2+1=0$$

所以 $x^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,依题意,应舍去$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,于是 $x^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,解之得 $x=\pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,舍去负值,得 $x=\omega$.

11. 如图3-9，在Rt$\triangle ABC$中，CD为斜边上的高，且$S^2_{\triangle CBD}=S_{\triangle ADC}\cdot S_{\triangle ABC}$，则$D$为$AB$的黄金分割点，且$\sin B=\omega$.

证明　因为　$S^2_{\triangle CBD}=S_{\triangle ADC}\cdot S_{\triangle ABC}$，

即$\left(\dfrac{BD}{2}\cdot CD\right)^2=\left(\dfrac{AD}{2}\cdot CD\right)\cdot\left(\dfrac{AB}{2}\cdot CD\right)$.

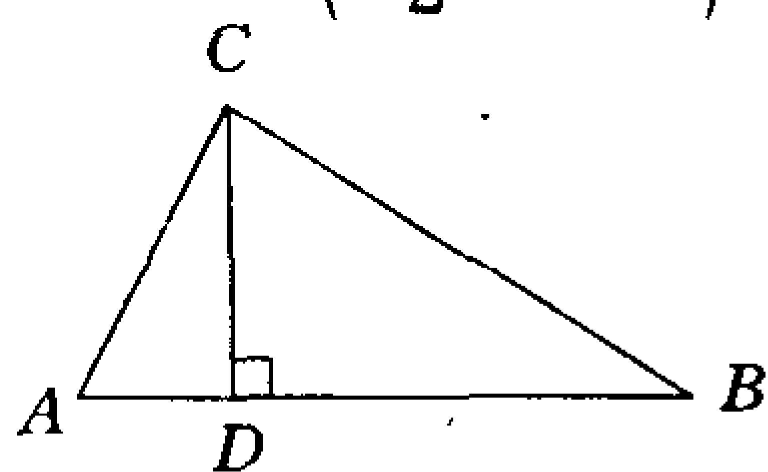


图 3-9

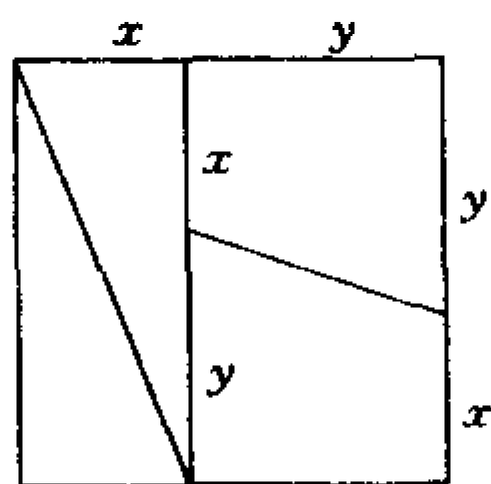
得　$BD^2=AD\cdot AB$，即D为AB的黄金分割点.

又　$AC^2=AD\cdot AB$，

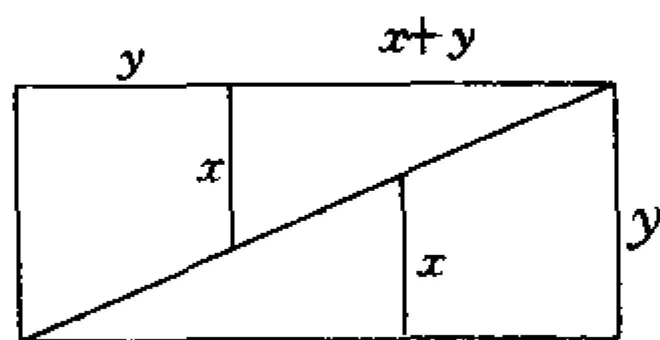
所以　$AC=BD$，

从而有$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BD}{AB}=\omega$.

12. 把正方形如图3-10(a)那样剪开后拼成图3-10(b)那样的长方形，则$\dfrac{x}{y}=\omega$.



(a)



(b)

图 3-10

证明　正方形面积为：$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，

长方形面积为：$(y+x+y)y=2y^2+xy$.

因为剪拼前后，面积不变.

所以$x^2+2xy+y^2=2y^2+xy$.

即有$\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0$，故$\dfrac{x}{y}=\omega$(负值舍去).

13. 在平面坐标系中，若以三点$(1,x)$、$(x,1)$、$(-1,-x)$为顶点的三角形的面积等于x，则$x=\omega$.

证明 由 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \end{vmatrix} = x$，得

$x^2 + x - 1 = 0$，所以 $x = \omega$(负值舍去).

14. 设 $u_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\cdots0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0\cdots0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1\cdots0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots1 & 1 \end{vmatrix}$

为 n 阶行列式，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \omega$.

提示　先证 u_n 为斐波那契数列通项，再求极限得之. 这是一道前苏联大学生竞赛题.

§3.4　黄金三角形、黄金矩形、黄金椭圆、黄金长方体

下面我们给出黄金三角形、黄金矩形、黄金椭圆以及黄金长方体的概念，及其一些有趣的性质，但为节省篇幅，证明均略去.

1. 黄金三角形

前面我们已经提到，顶角为 36° 的等腰三角形其底与腰之比等于 ω，这样的三角形叫黄金三角形，黄金三角形还有下列性质.

(1) 如图 3-11，BD 为黄金三角形 ABC 底角 B 的平分线，则 $\triangle BCD$ 也是黄金三角形；

(2) 仿上作 $\angle C$ 的平分线交 BD 于 E，则 $\triangle CDE$ 也是黄金三角形；如此下去可得一黄金三角形串：$\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \cdots\cdots$, $\triangle_n, \cdots\cdots$，且所有的黄金三角形相似，其相邻的两黄金三角形

的相似比为 ω；

(3) 在上述的黄金三角形串 $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \cdots, \triangle_n, \cdots$ 中，$\triangle_{n+3}$ 的右腰与 $\triangle_n$ 的左腰平行(如图 3-11 中，$\triangle DEF$ 的右腰 DF 与 $\triangle ABC$ 的左腰 AB 平行)

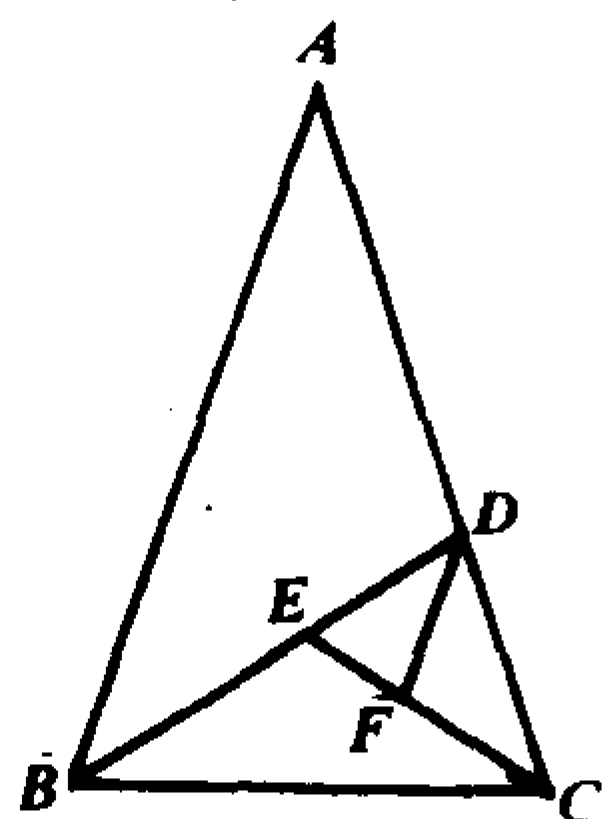
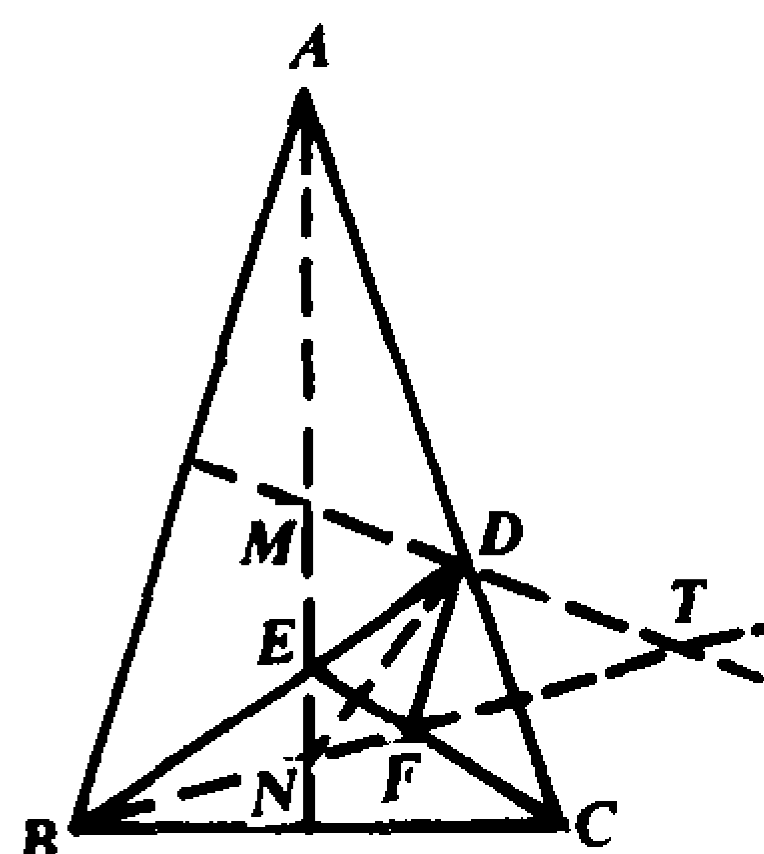


图 3-11

(4) 三角形串中，$\triangle_n$、$\triangle_{n+1}$、$\triangle_{n+3}$ 的底边上的三条高共点(如图 3-12，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$ 底边上的高 MN、NT、DN 共点)；

与黄金三角形串 $\{\triangle_n\}$ 相邻的均是些底角为 36° 的等腰三角形，它们也构成一三角形串，在这三角形串中，相邻三个三角形底边上的高也构成黄金三角形(如图 3-12，这个三角形串中的 $\triangle DAB$、$\triangle EBC$、$\triangle FCD$ 的高构成黄金三角形 TMN)；这些黄金三角形也有一些有趣性质，这里就不一一列举了。



2. 黄金矩形

长宽之比为 ω 的矩形叫黄金矩形.

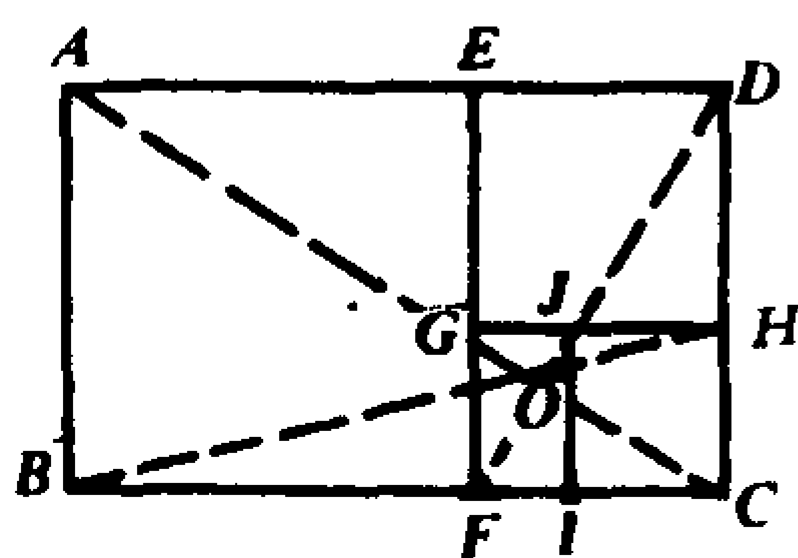


图 3-13

如图 3-13，$ABCD$ 为黄金矩形，$AD = 1, CD = \omega$，则

(1) CD 是 AD 和 $AD - CD$ 的比例中项；

(2) 作正方形 $ABFE$，则矩形 $EFCD$ 仍为黄金矩形；再作正方形 $EDHG$，则矩形 $FCHG$ 也为黄金矩形，如此下去，可得一串正方形与一串黄金矩形(这反映了它的再生性)；

(3) 上面的正方形 $ABFE$、$EDHG$、$CHJI$、…，构成一正方形旋涡，其边长组成等比数列：$\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots$，其面积和为矩形面积 ω（这给级数和 $\omega^2+\omega^4+\omega^6+\cdots=\omega$ 以几何解释）；

(4) 在上面的一串黄金矩形中，他们都相似，且相邻的两矩形相似比为 ω；

这串黄金矩形中还有如下性质

(5) A、G、C 三点共线；D、J、F 共线；

(6) AC、DF、BH 共点，设为 O；

(7) O 为所有黄金矩形的相似中心；

(8) $AC \perp DF$；

(9) $\frac{OD}{OA}=\frac{OC}{OD}=\frac{OF}{OC}=\frac{OG}{OF}=\omega, \frac{OH}{OB}=\omega^2$；

(10) 点 O 到 BC 的距离为 $\frac{\omega^3}{1+\omega^2}$，到 DC 的距离为 $\frac{\omega^2}{1+\omega^2}$；

(11) 点 A、D、C、F、G、J、… 在同一对数螺线上.

3. **黄金椭圆**

若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的短轴与长轴之比 $\frac{b}{a}=\omega$，则称此椭圆为黄金椭圆. 以椭圆中心为圆心，$c=\sqrt{a^2-b^2}$ 为半径的圆称为焦点圆. 则

(1) 黄金椭圆与焦点圆的面积相等；

(2) 椭圆与焦点圆在第一象限的交点为：$Q(b, \sqrt{\omega}\,b)$（如图 3-14）；

(3) 设 OQ 与 x 轴正向夹角为 θ，则 $\operatorname{tg}\theta=\cos\theta=\sqrt{\omega}$，$\sin\theta=\omega$；

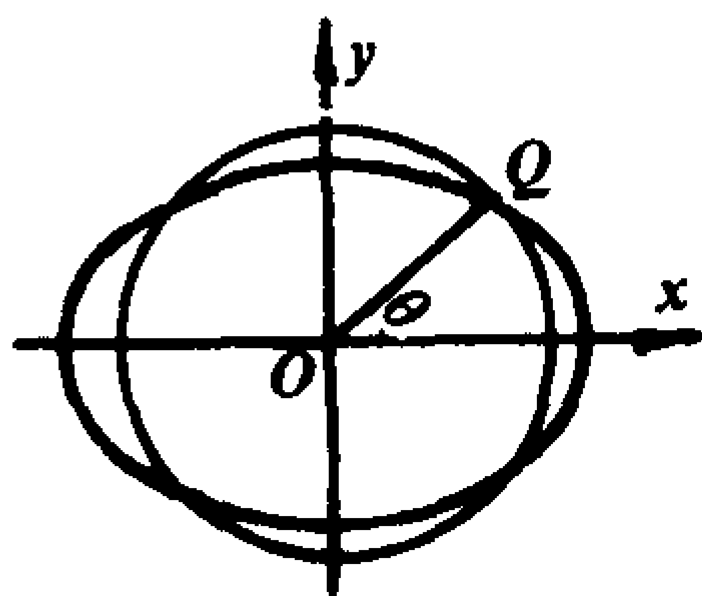


图 3-14

(4) 黄金椭圆的离心率 $e = \sqrt{\omega}$.

我们知道,二次曲线本是 π 的天下,岂知黄金数 ω 也在此有立足之地!

4. 黄金长方体

长、宽、高之比是 $\omega : 1 : \frac{1}{\omega}$ 的长方体称为黄金长方体. 黄金长方体的表面积与其外接球表面积之比是 $\omega : \pi$. 这里, ω 又与 π 建立起"亲缘"关系.

§3.5 在几何作图中的应用

下面我们解决几个与黄金分割有关的作图问题,其证明留给读者.

例 3.1 求作边长为 a 的正五边形.

作法 (如图 3-15)

(1) 作线段 $BC = a$,取其中点 M;

(2) 作 $FM \perp BC$,且在 FM 上取点 P,使 $MP = BC = a$;

(3) 连 BP 延长至 Q,使 $PQ = \frac{a}{2}$,则 BQ 即为正五边形对角线的长;

(4) 以 B 为圆心,BQ 为半径画弧交 MF 于 E,则 E 为正五边形顶点之一;

(5) 分别以 B、C、E 为圆心,a 为半径画弧得交点 A、D,连结 AB、CD、DE、EA 即得所求正五边形.

例 3.2 将半径为 R 的一已知圆十等分.

作法 (如图 3-16)

(1) 在 $\odot O$ 内取两条垂直的半径 OA_0、OB;

(2) 取 OB 中点 M,连 A_0M;

(3) 在线段 A_0M 上取 $MP = \frac{1}{2}R$;

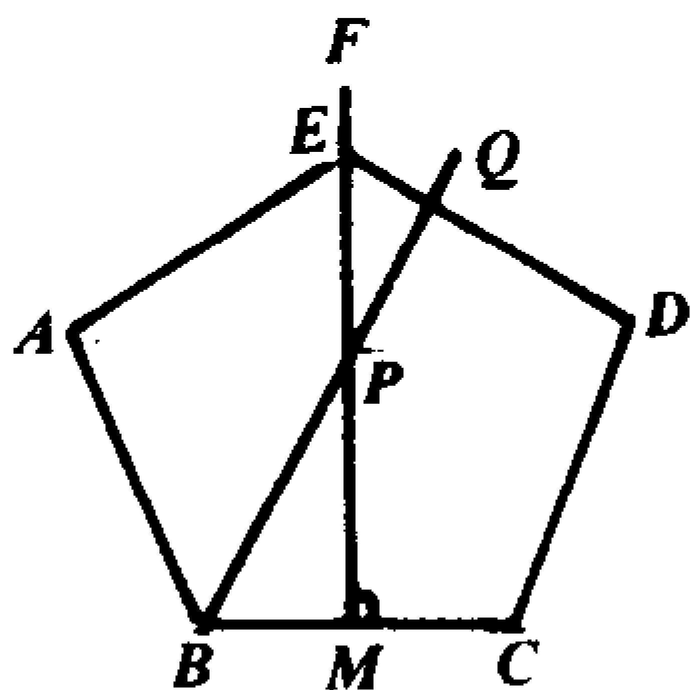


图 3-15

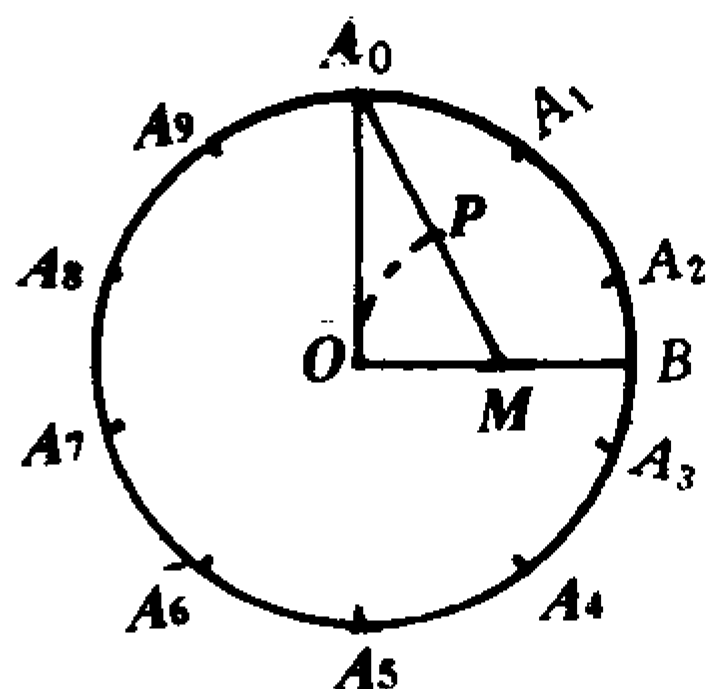


图 3-16

(4) 从 A_0 起，以 A_0P 为半径，在 $\odot O$ 上逐次截取可得 A_1、A_2、A_3、…、A_9，则 A_0、A_1、A_2、…、A_9 将 $\odot O$ 十等分.

例 3.3　作已知圆的内接正五边形.

在例 3.2 中，隔点连结有关分点，则可得圆内接正五边形. 但下面我们给出它的另一种作法如图 3-17.

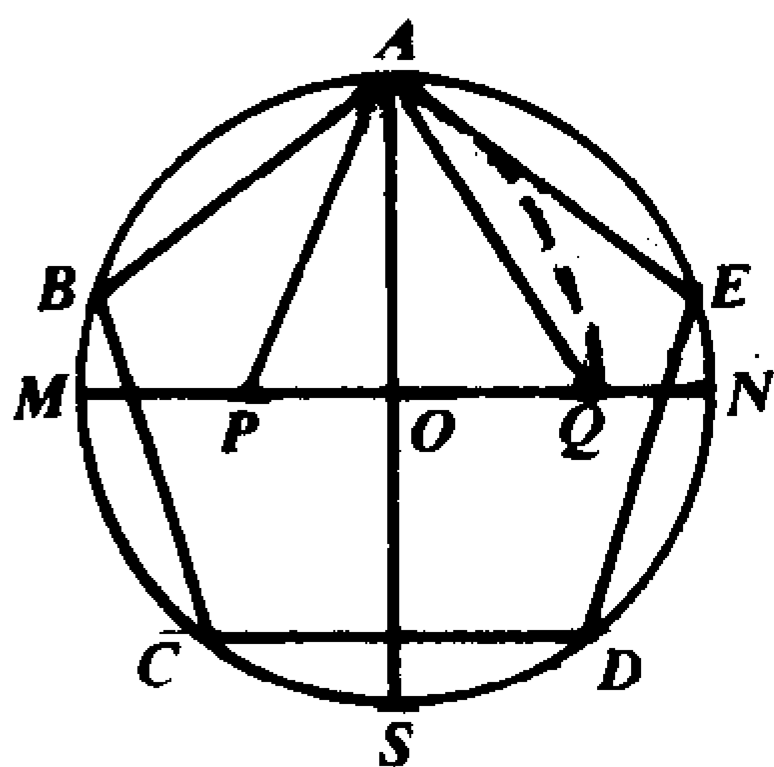


图 3-17

(1) 在半径为 R 的圆 O 内作互相垂直的两直径 AS、MN；

(2) 取 OM 中点 P，连 AP；

(3) 在线段 PN 上截取 $PQ = AP$；

(4) 以 AQ 之长在圆周上依次截取可得分点 A、B、C、D、E；

(5) 依次连结 AB、BC、CD、DE、EA 即得圆内接正五边形.

练习与思考

1. 证明在图 3-7 中 M、N 分别为 BE、BM 的黄金分割点.

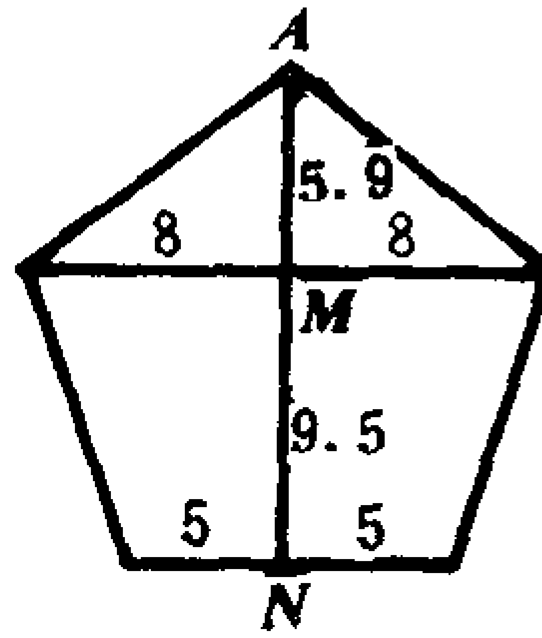
2. 我国很早以前民间就流传一种正五边形的近似作法："九五顶五九，八五两边分(如图)." 这种作法的精确度是很

高的.

(1) 验证 M 点极接近 AN 的黄金分割点;

(2) 试用这种方法作一边长为50毫米的正五边形;

3. 验证黄金长方体的表面积与其外接球表面积的比为 $\omega : \pi$.



第四章　梅涅劳斯定理

§4.1　定　　理

梅涅劳斯定理　一直线分别截$\triangle ABC$三边BC、CA、AB于D、E、F，则$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$.

梅涅劳斯(Menelaus，约公元98年)是希腊数学家兼天文学家，著有几何学和三角学方面的书籍.他在三角学方面的成就被称为希腊三角术的顶峰，他在自己的主要著作《球面学》(Sphaerics)的第二篇中介绍了一个关于球面三角形的定理(即下面的定理4.5)，这个定理的证明要依据上面的梅氏定理，所以人们认为，梅氏定理的证明他早已知道，或已在他先前的著作中证明过.1678年，意大利几何学家兼水利工程师塞瓦(见第五章)又重新发现了这一定理，并连同他自己发现的定理(塞瓦定理)一并发表而流传于世.

§4.2　定理的证明

证明　如图4-1，过点C作$CG\parallel DF$交AB于G，则有$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BF}{GF}$，$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{GF}{FA}$.

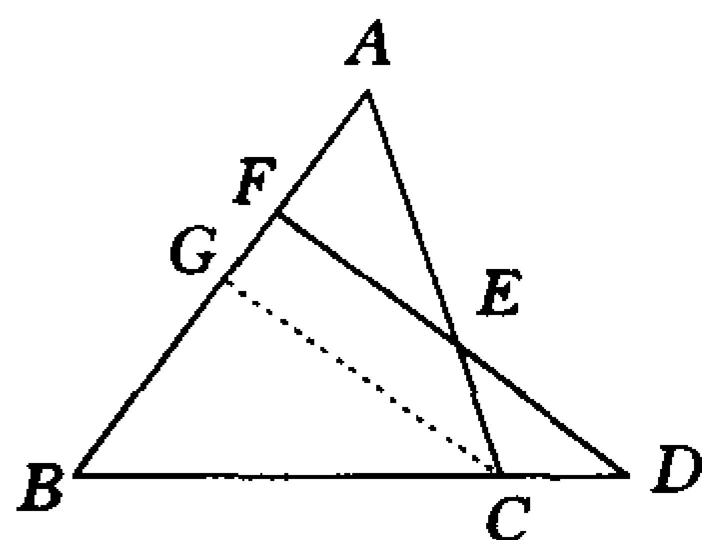


图 4-1

所以　$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BF}{GF}$

$\cdot \dfrac{GF}{AF} = 1.$

梅氏定理的逆命题也成立.

逆定理 若 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上的点,且 $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$,则 D、E、F 共线.

证明 设 FE 与 BC 交于 D',由上面的证明有

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

又 $\dfrac{AF}{FB} \cdot \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} = 1$,所以有 $\dfrac{BD'}{D'C} = \dfrac{BD}{DC}$,从而 D' 与 D 重合,故 D、E、F 共线.

§4.3 定理的推广

1. 将三角形向凸 n 边形推广

定理4.1 一直线 l 截凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边 A_1A_2、A_2A_3、…、A_nA_1 或其延长线(不过顶点 A_i)于点 B_1、B_2、…、B_n,则 $\dfrac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \dfrac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdots \dfrac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1$.

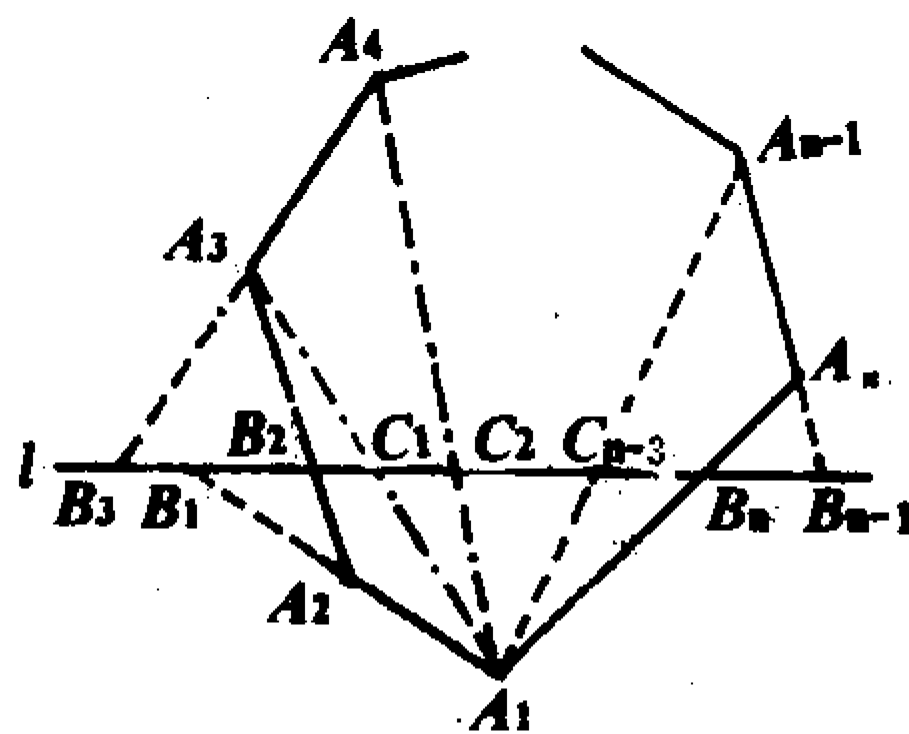


图 4-2

证明 如图 4-2,连 A_1A_3、A_1A_4、…、A_1A_{n-1},设与 l 的交点分别为 C_1、C_2、…、C_{n-3},则有

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \cdot \frac{A_3C_1}{C_1A_1} = 1,$$

$$\frac{A_1C_1}{C_1A_3} \cdot \frac{A_3B_3}{B_3A_4} \cdot \frac{A_4C_2}{C_2A_1} = 1,$$

…………

$$\frac{A_1C_{n-3}}{C_{n-3}A_{n-1}}\cdot\frac{A_{n-1}B_{n-1}}{B_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1.$$

将上面诸式两边分别相乘即得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1\,.$$

当然这一定理还可以应用数学归纳法和解析法证明，如设各顶点坐标为 $A_i(x_i,y_i)(y_i\neq 0,i=1、2、\cdots、n)$，$l$ 的方程为 $y=0$，则

$$\left|\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\right|\cdot\left|\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\right|\cdots\left|\frac{A_nB_n}{B_nA_1}\right|=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\cdot\left|\frac{y_2}{y_3}\right|\cdots\left|\frac{y_n}{y_1}\right|=1\,.$$

顺便指出，当 $n>3$ 时，上述定理的逆命题不成立，即若 $\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1$，则 $B_1、B_2、\cdots、B_n$（当 $n\geqslant 4$ 时）不一定共线.

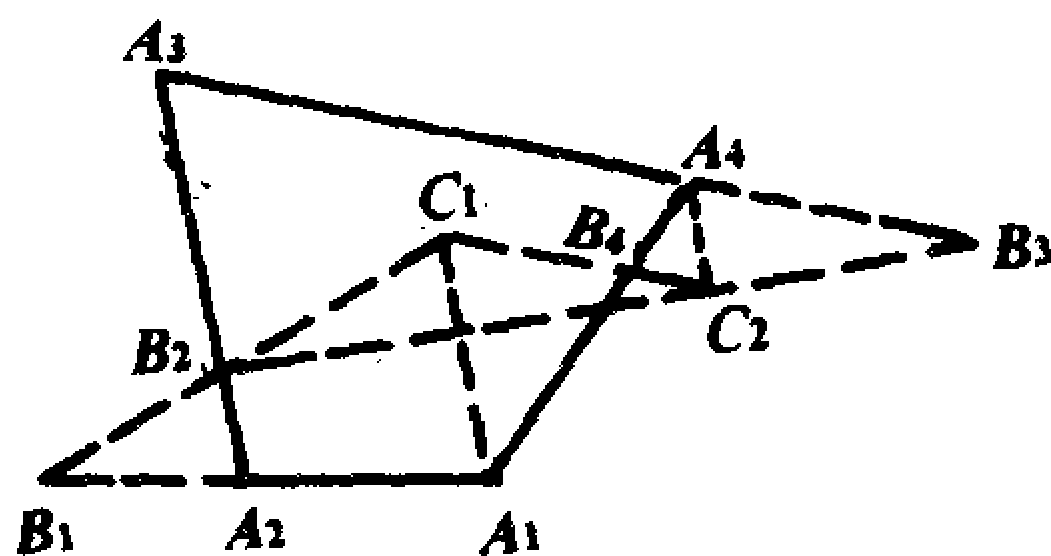


图 4-3

今举一四边形作为反例. 如图 4-3，有 $A_1C_1 \parallel C_2A_4 \parallel A_2A_3$，从而有

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{A_1C_1}{A_2B_2}、\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=\frac{A_4C_2}{A_1C_1}、\frac{A_3B_3}{B_3A_4}=\frac{A_3B_2}{A_4C_2},$$

将三式两边分别相乘，有

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1\,.$$

但显然 $B_1、B_2、B_3、B_4$ 不共线.

2. 将三边上共线的三点推广为不共线的三点

在梅氏定理中，如果我们引入有向线段的概念，如图 4-1，规定 BC 为正向，D 为 BC 延长线上一点，则 $BD>0$，$DC<0$，因此 $\frac{BD}{DC}<0$，这时梅氏定理的结论应为

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1.$$

在这种规定下，我们又有下面的推广

定理 4.2 设 D、E、F 为 $\triangle ABC$ 三边(或其延长线)上三点，且 $\frac{AF}{FB}=\lambda_1$，$\frac{BD}{DC}=\lambda_2$，$\frac{CE}{EA}=\lambda_3$，则

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}.$$

证明 如图 4-4，

因为 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{BF+FA}{BF}=1+\lambda_1$，

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{BD+DC}{DB}=1+\frac{1}{\lambda_2},$$

所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{1+\lambda_1}S_{\triangle ABD}$

$$=\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}S_{\triangle ABC}.$$

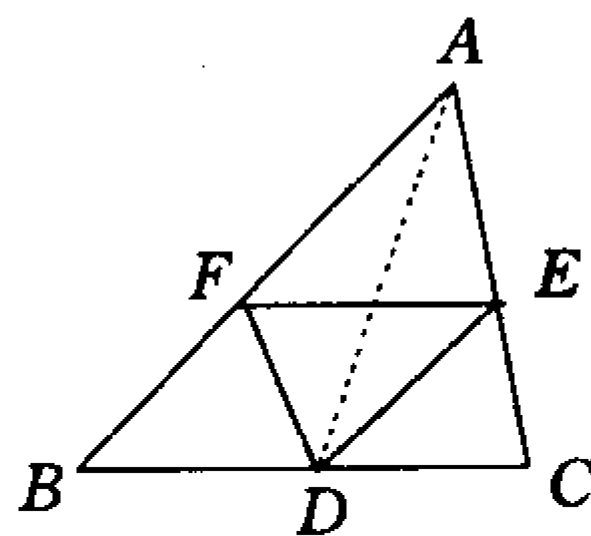


图 4-4

同理

$$S_{\triangle CDE}=\frac{\lambda_3}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}S_{\triangle ABC}.$$

$$S_{\triangle AEF}=\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}S_{\triangle ABC}.$$

所以
$$S_{\triangle DEF}=\left\{1-\left[\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}+\frac{\lambda_3}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}+\frac{\lambda_1}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}\right]\right\}S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}.$$

此定理还可用解析法证明.

显然当 D、E、F 共线时，如图 4-1，有 $S_{\triangle DEF}=0$，故有 $1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，即为梅涅劳斯定理.

3. 向空间推广

定理 4.3 一平面截空间四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 四边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1 分别于 B_1、B_2、B_3、B_4，则

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1$$

证明 如图 4-5.

若 $B_1B_2 \parallel A_1A_3$，则 A_1A_3 平行于 B_1B_2、B_3B_4 所确定的平面，故必有 $A_1A_3 \parallel B_3B_4$，显然上式成立.

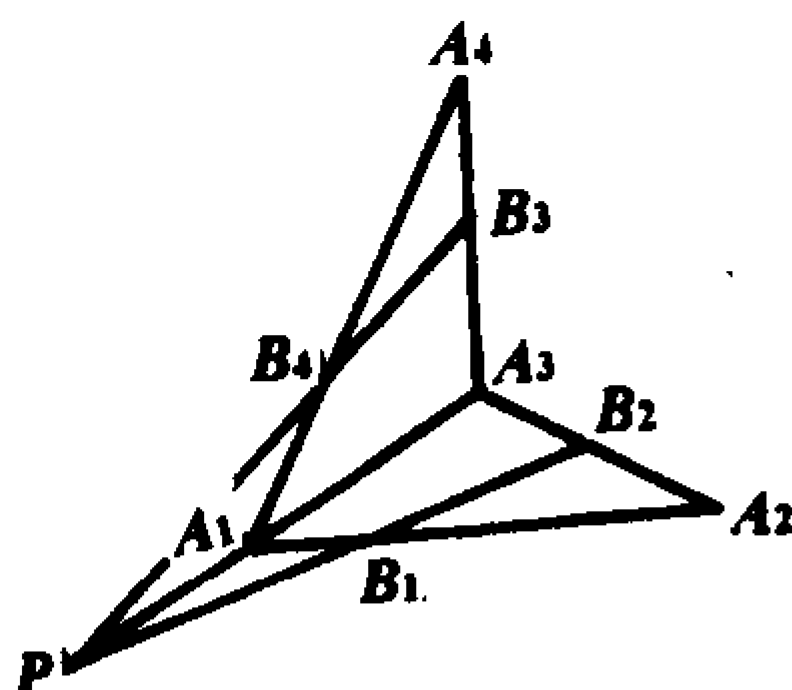


图 4-5

若 B_1B_2 不平行于 A_1A_3，可设 A_1A_3 与 B_1B_2、B_3B_4 所在的平面交于 P，则有

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3P}{PA_1}=1,$$

$$\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}\cdot\frac{A_1P}{PA_3}=1.$$

两式相乘，即得

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1.$$

反之，还可证明

定理 4.4 若 B_1、B_2、B_3、B_4 分别为空间四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 四边 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_1（或其延长线）上的点，且

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1$$

则 B_1、B_2、B_3、B_4 共面.

证明 如图 4-5，若 $B_1B_2 \parallel A_1A_3$，则

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}=\frac{B_2A_3}{A_2B_2}.$$

又 $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1,$$

所以 $$\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1.$$

所以 $B_4B_3 /\!/ A_1A_3$，从而 B_1、B_2、B_3、B_4、共面；若 B_1B_2 不平行于 A_1A_3，设交于 P，则有

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3P}{PA_1}=1,$$

又 $$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}=1,$$

所以 $$\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}\cdot\frac{A_1P}{PA_3}=1.$$

从而 B_3、B_4、P 共线，因此 B_2B_1 与 B_3B_4 交于 P，B_1、B_2、B_3、B_4 共面.

4. 将平面三角形向球面三角形推广

最后我们给出梅氏定理向球面三角形的一个推广，它是梅涅劳斯的《球面学》第三篇的第一个定理.

定理 4.5 设 ABC 为球面三角形，一圆弧与 ABC 三边或其延长线分别相交于 D、E、F（图 4-6），则

$$\frac{\sin\overset{\frown}{AF}}{\sin\overset{\frown}{FB}}\cdot\frac{\sin\overset{\frown}{BD}}{\sin\overset{\frown}{DC}}\cdot\frac{\sin\overset{\frown}{CE}}{\sin\overset{\frown}{EA}}=1.$$

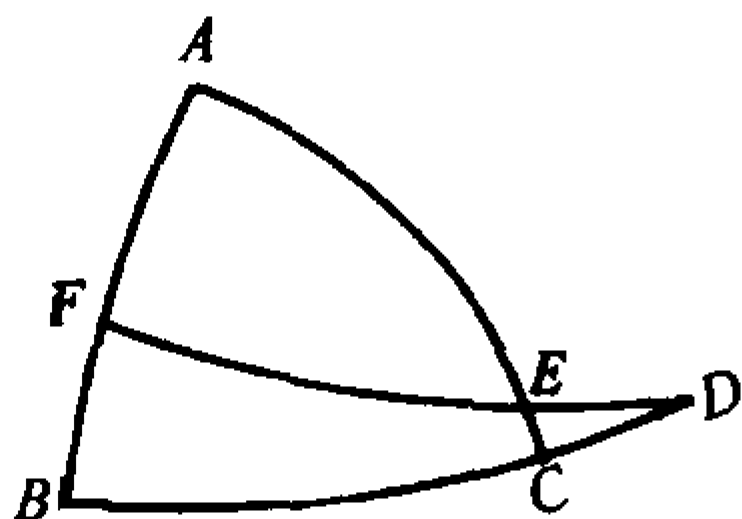


图 4-6

该定理的证明超出本书范围，略.

§4.4 定理的应用

为叙述方便，不妨把梅氏定理中的 $\triangle ABC$ 叫做梅氏三角形. 直线 DEF 叫做梅氏直线.

1. 证线段相等

例 4.1 在 $\triangle ABC(AB > AC)$ 的边 AB、AC 上分别有点 D、E，DE 的延长线交 BC 的延长线于 P，且 $\frac{BP}{CP} = \frac{BD}{CE}$，求证：$AD = AE$.

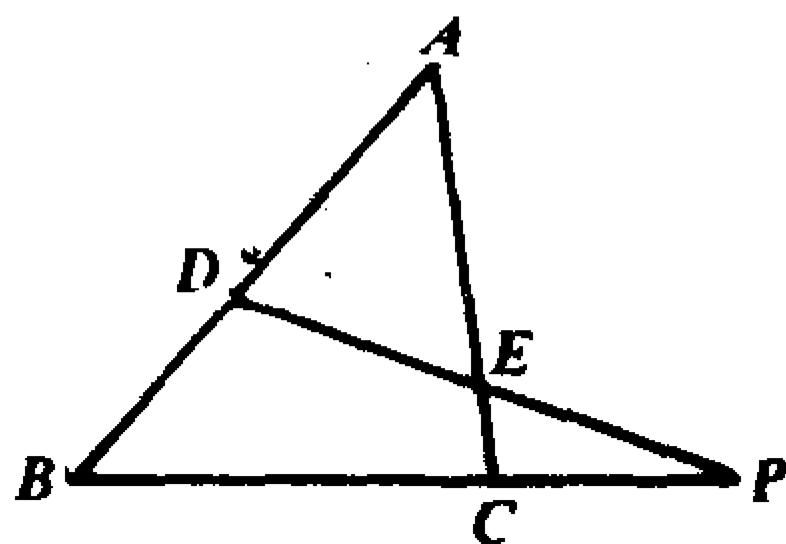


图 4-7

证明 如图 4-7，将 $\triangle ABC$ 看成梅氏三角形，DEP 看成梅氏直线，则由梅氏定理，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1\\&\frac{BP}{CP} = \frac{BD}{CE}\end{aligned}\right\} \Rightarrow AD = AE.$$

2. 证角相等

例 4.2 如图 4-8，$BE = CD$，$EF = DF$，求证：$\angle B = \angle ACB$.

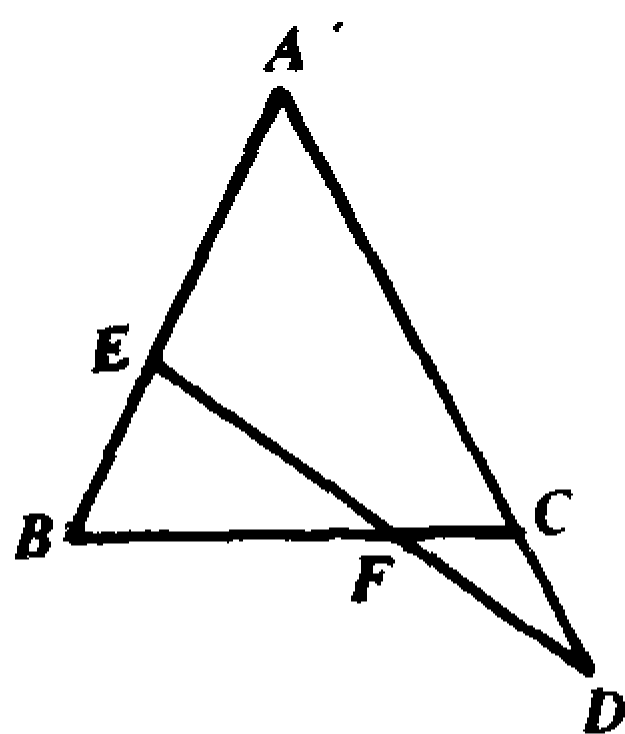


图 4-8

证明 视 $\triangle DAE$ 为梅氏三角形，BFC 为梅氏直线，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FD} \cdot \frac{DC}{CA} = 1\\&BE = CD, EF = DF\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{CA} = 1.$$

即 $AB = AC$， 所以 $\angle B = \angle ACB$.

3. 证线段二次等式

例 4.3 如图 4-9，在 $\triangle ABC$ 中，$BD = CE$，DE 的延长线交 BC 的延长线于点 F，求证：

$AC \cdot EF = AB \cdot DF$.

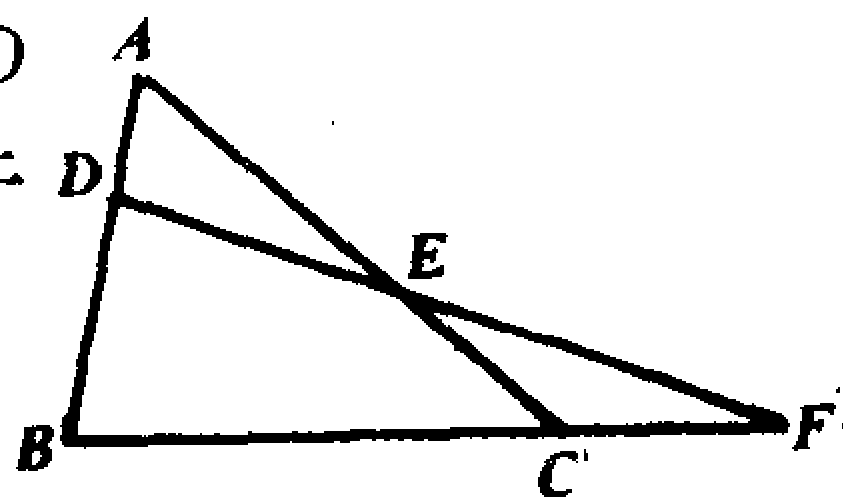


图 4-9

证明 将 $\triangle ADE$ 看成梅氏三角

形，BCF 看成梅氏直线，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DF}{FE}\cdot\dfrac{EC}{CA}=1\\ BD=CE\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AC\cdot EF=AB\cdot DF.$$

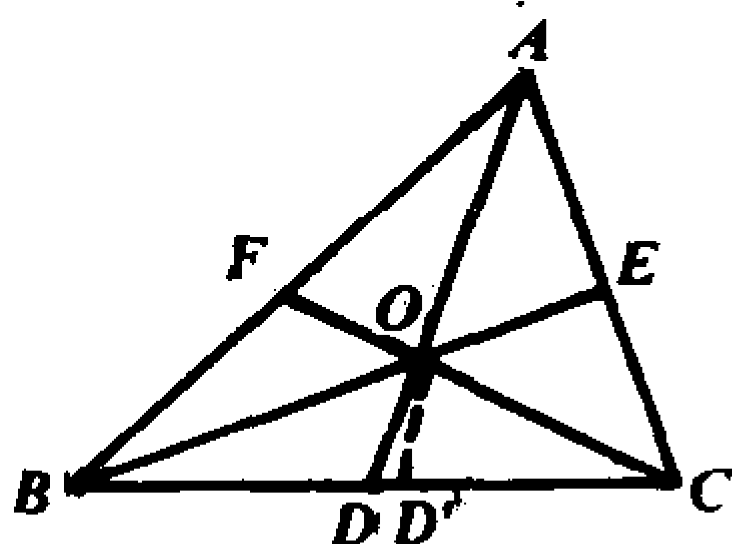


图 4-10

4. 证三线共点

例 4.4 证明三角形三条中线交于一点.

证明 设中线 BE、CF 交于 O，D 为 BC 中点，如图 4-10，把 $\triangle AFC$ 看成梅氏三角形，BOE 看成梅氏直线，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FO}{OC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1\\ AB=2BF, CE=EA\end{array}\right\}\Rightarrow 2FO=OC.$$

连结 AO 延长交 BC 于 D'，将 $\triangle FBC$ 看成梅氏三角形，AOD' 看成梅氏直线，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BD'}{D'C}\cdot\dfrac{CO}{OF}\cdot\dfrac{FA}{AB}=1\\ OC=2OF, AB=2FA\end{array}\right\}\Rightarrow BD'=D'C.$$

所以 D' 与 D 重合，因而三中线交于一点.

5. 证三点共线

例 4.5 如图 4-11，设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分线与边 BC 的延长线交于 P，$\angle B$ 的平分线与边 CA 交于 Q，$\angle C$ 的平分线和边 AB 交于 R，则 P、Q、R 三点共线.

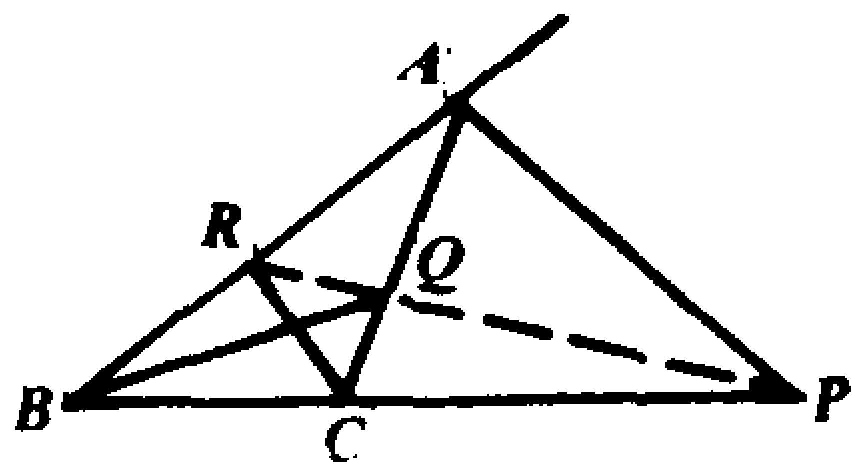


图 4-11

证明 依内(外)角平分线定理，可得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{CA}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CA}{BC}=1.$$

所以，由逆定理，R、Q、P 共线.

6. 解定值问题

例4.6 如图4-12，过$\angle XOY$的平分线上一点A，任作一直线与OX、OY分别相交于P、Q，求证：$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$为定值.

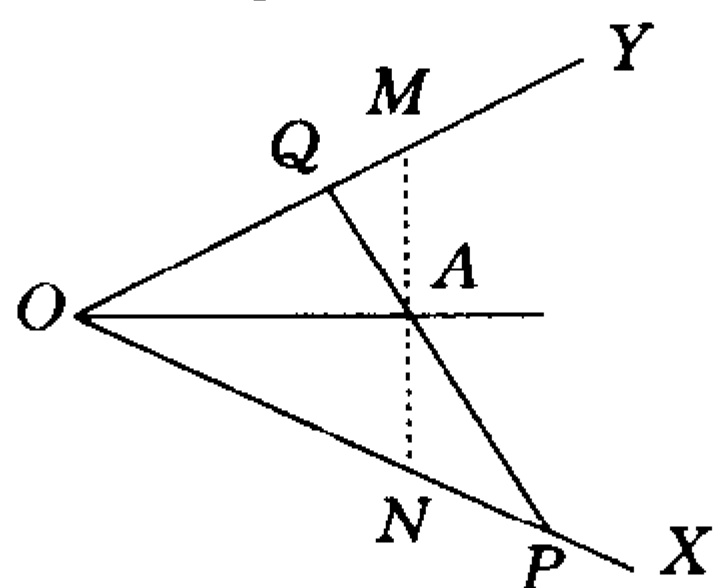


图 4-12

证明 过A作$MN\perp OA$，交OX于N、OY于M，则$AM=AN$，$OM=ON$，将$\triangle QAM$看成梅氏三角形，OX看成梅氏直线，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{MO}{OQ}\cdot\frac{QP}{PA}\cdot\frac{AN}{NM}=1\\&MN=2AN\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{MO}{OQ}=\frac{2PA}{QP}\qquad ①$$

将$\triangle ANP$看成梅氏三角形，OY看成梅氏直线，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{NO}{OP}\cdot\frac{PQ}{QA}\cdot\frac{AM}{MN}=1\\&MN=2AM\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{NO}{OP}=\frac{2AQ}{PQ}\qquad ②$$

由①、②得

$$\frac{MO}{OQ}+\frac{NO}{OP}=\frac{2PA}{QP}+\frac{2AQ}{PQ}=2$$

所以 $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{2}{ON}$（定值）.

7. 求比值

例4.7 如图4-13，有$\frac{AB}{BC}=\frac{DF}{FB}=2$，求$\frac{DE}{EC}$、$\frac{AF}{FE}$.

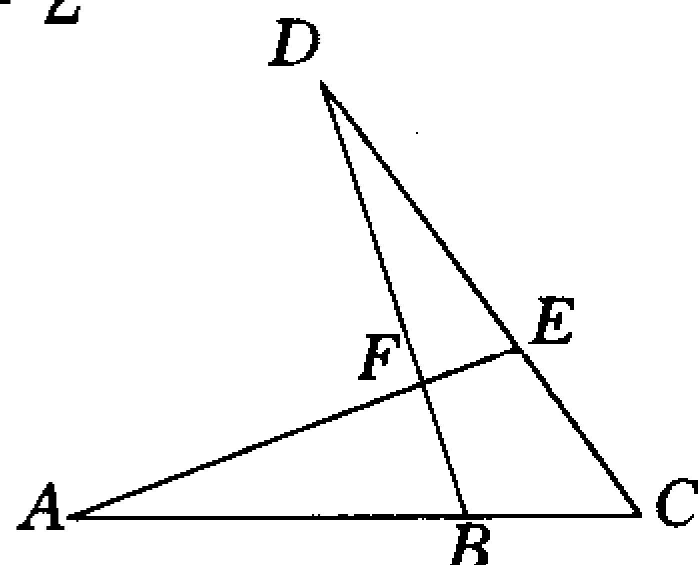


图 4-13

解 将$\triangle DBC$看成梅氏三角形，AE看成梅氏直线，则

有

$$\frac{DF}{FB}\cdot\frac{BA}{AC}\cdot\frac{CE}{ED}=1\Rightarrow\frac{DE}{EC}=\frac{DF}{FB}\cdot\frac{BA}{AC}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

将 $\triangle ACE$ 看成梅氏三角形，DB 看成梅氏直线，则有

$$\frac{AF}{FE}\cdot\frac{ED}{DC}\cdot\frac{CB}{BA}=1\Rightarrow\frac{AF}{FE}=\frac{DC}{ED}\cdot\frac{AB}{CB}=\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{7}{2}.$$

3. 证线段的和差倍分

例4.8 如图4-14，E 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线 AD 上的中点，求证：$AP=\frac{1}{2}CP$，$BE=3EP$.

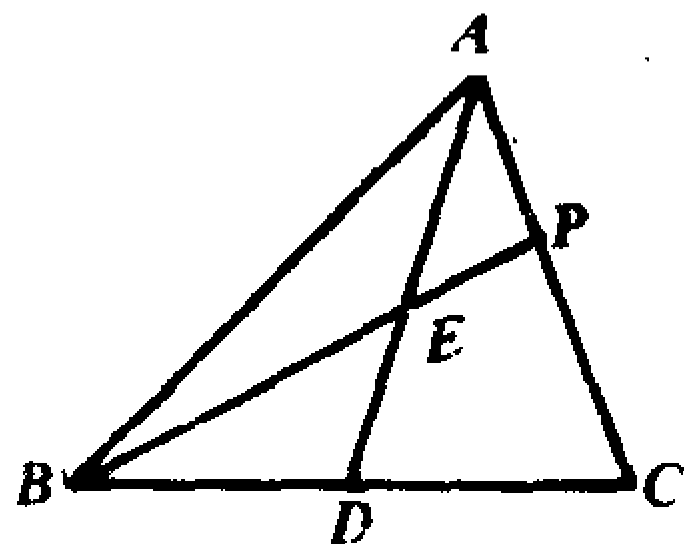


图 4-14

证明 视 $\triangle ADC$ 为梅氏三角形，BEP 为梅氏直线，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{CB}{BD}\cdot\dfrac{DE}{EA}\cdot\dfrac{AP}{PC}=1\\ BC=2BD,DE=EA\end{array}\right\}\Rightarrow AP=\frac{1}{2}CP.$$

视 $\triangle BCP$ 为梅氏三角形，AED 为梅氏直线，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{CA}{AP}\cdot\dfrac{PE}{EB}\cdot\dfrac{BD}{DC}=1\\ AC=3AP,BD=DC\end{array}\right\}\Rightarrow BE=3EP.$$

例4.9 如图4-15，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，过 BC 中点 D 作直线垂直于 $\angle A$ 的平分线交 AB 于 E，交 AC 的延长线于 F，求证：$BE=CF=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

证明 易证 $AE=AF$，视 $\triangle ABC$ 为梅氏三角形，EDF 为梅氏直线，则有

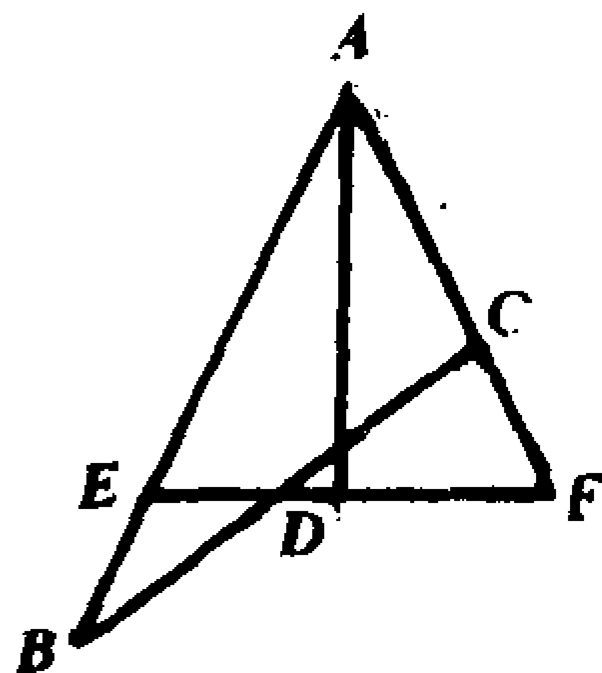


图 4-15

$$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BE}{EA}=1,$$

又 $AE=AF, BD=CD$，所以 $BE=CF$，

而 $\frac{1}{2}(AB-AC)=\frac{1}{2}(AE+BE-AC)$

$=\frac{1}{2}(AF+CF-AC)$

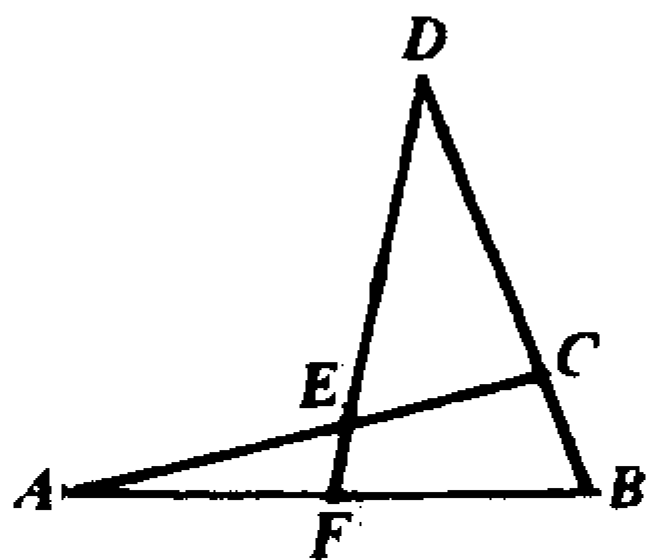
$=\frac{1}{2}\cdot 2CF=CF.$

所以 $BE=CF=\frac{1}{2}(AB-AC).$

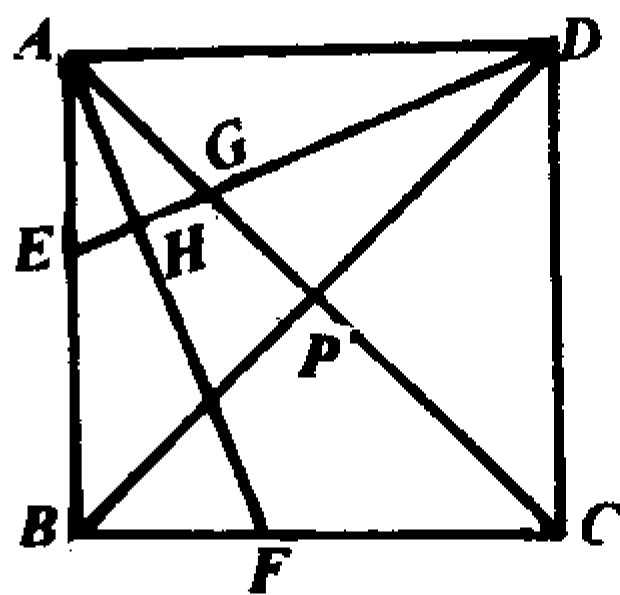
关于梅氏定理的应用，后面还会看到.

练习与思考

1. 如图，已知$\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$，$\frac{BC}{CD}=\frac{2}{5}$，求$\frac{DE}{EF}$.



（第1题）

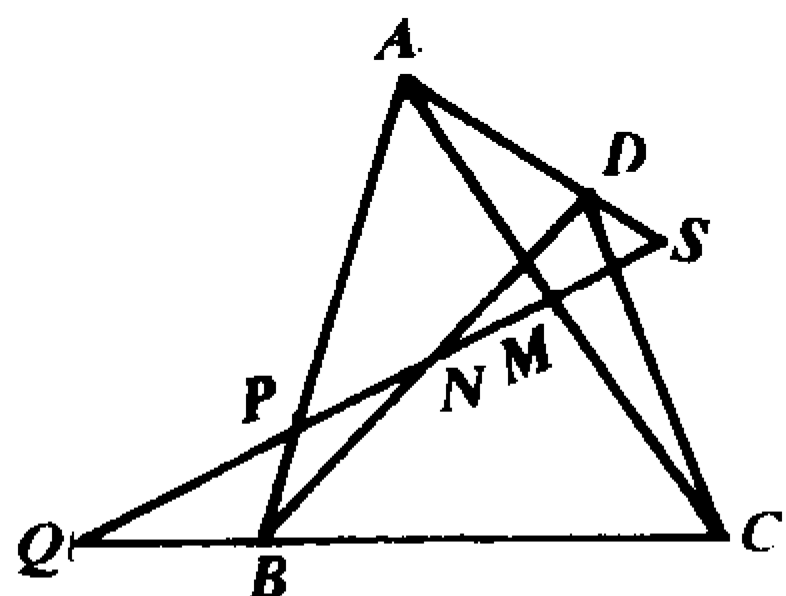


（第2题）

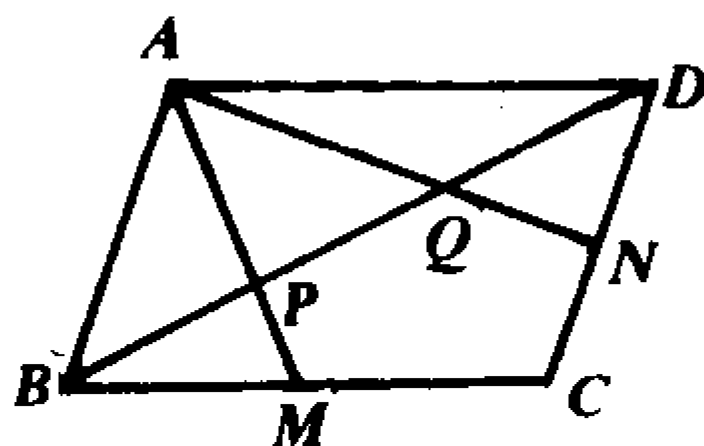
2. 如图，P是正方形$ABCD$对角线的交点，AF平分$\angle BAC$，$DH\perp AF$，H为垂足，DH交AP于G，交AB于E，求证：$BE=2PG$.

3. 如图，已知M、N分别是四边形$ABCD$的对角线AC、

BD 的中点，直线 MN 交 AB、BC、CD、DA 或延长线于 P、Q、R、S，求证：$\frac{AP}{BP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{CR}{DR}=\frac{AS}{DS}$.



（第3题）



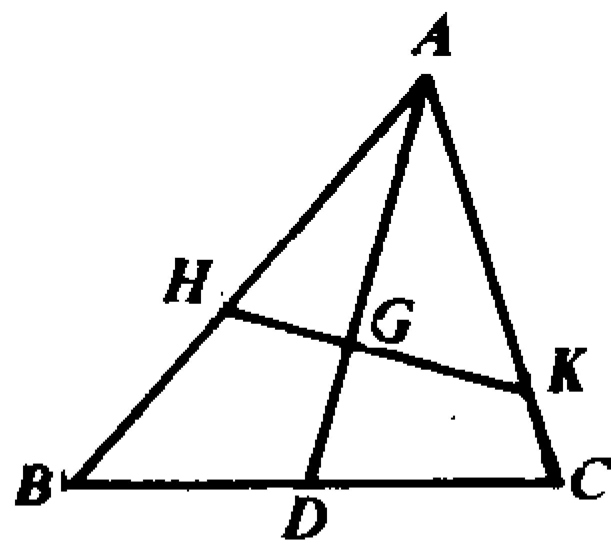
（第5题）

4. 已知 E、F 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的点，$BE:EF:FC=1:2:3$，D 为 AC 中点，DB 被 AE、AF 截得三线段为 x、y、z，求 $x:y:z$.

5. M、N 分别为 $\square ABCD$ 的边 BC、CD 的中点，AM、AN 分别交 BD 于 P、Q. 求证：$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APQ}=S_{\triangle AQD}$.

6. G 为 $\triangle ABC$ 的重心，KGH 为 $\triangle ABC$ 的割线，求证：$\frac{BH}{HA}+\frac{CK}{KA}$ 为定值.

（提示，延长 HK 与 BC 交于 E）



（第6题）

第五章　塞瓦定理

§5.1　定　　理

与梅涅劳斯定理对偶的有

塞瓦定理　设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 或延长线上的点，且 AD、BE、CF 平行或共点，则

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

塞瓦(Ceva，1648 ～ 1734 年) 是意大利几何学家、水利工程师. 上述定理载于他的《关于直线》一书中，他用纯几何方法和基于静力学规律，从不同的角度证明了这一结论，并把它和自己重新发现的梅氏定理一同发表而流传至今.

塞瓦定理是解决共点线问题的有力工具.

§5.2　定理的证明

证明　若 $AD /\!/ BE /\!/ CF$，如图 5-1(a)，则

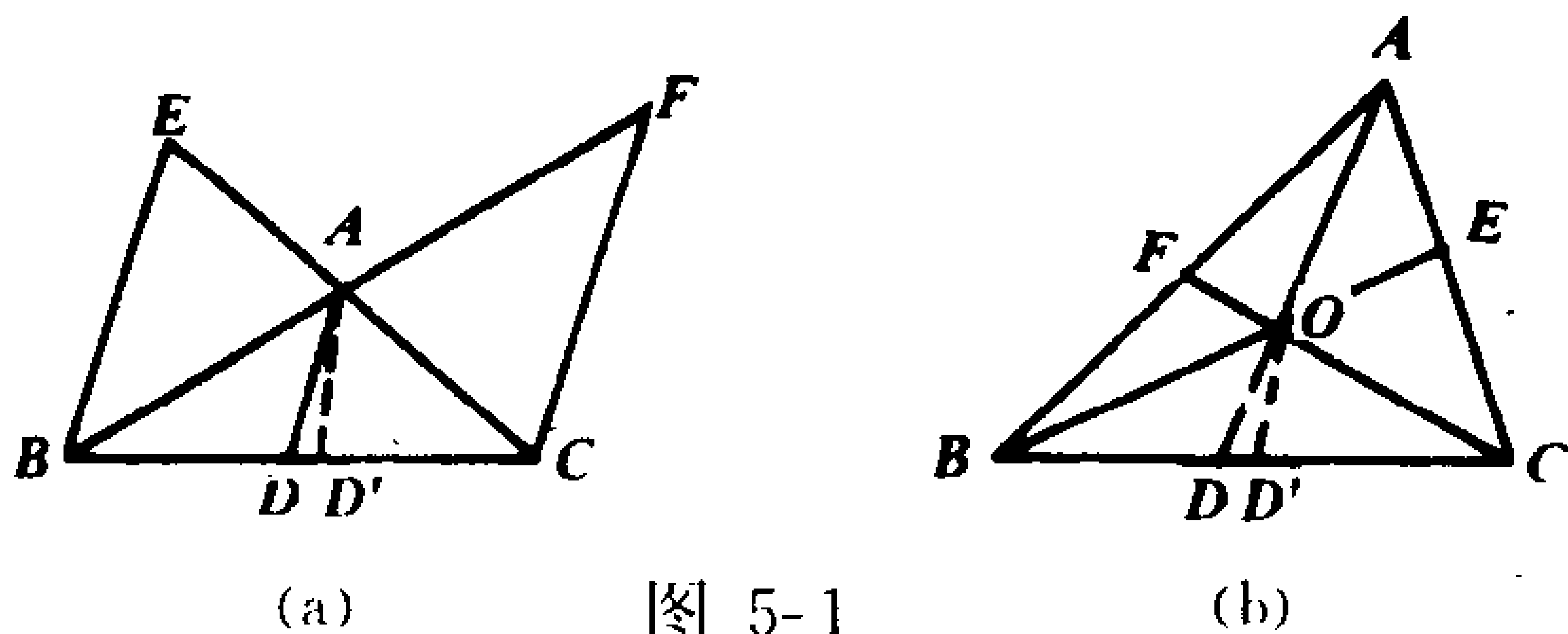
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{DC}{BC}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CB}{BD}=1;$$

若 AD、BE、CF 交于点 O，如图 5-1(b)，

因为 $$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AFC}}{S_{\triangle FBC}}=\frac{S_{\triangle AFO}}{S_{\triangle FBO}}=\frac{S_{\triangle AFC}-S_{\triangle AFO}}{S_{\triangle FBC}-S_{\triangle FBO}}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}},$$

同理 $$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAC}}\qquad\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}}.$$

所以 $$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}}\cdot\frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OAC}}\cdot\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OAB}}=1.$$



(a) 图 5-1 (b)

塞瓦定理的逆命题成立.

逆定理 若 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，且 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，则 AD、BE、CF 平行或共点.

证明 因为 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. 若 $BE\parallel CF$，可作 $AD'\parallel BE$ 交 BC 于 D'（图 5-1(a)）；若 BE 与 CF 交于点 O，连 AO，设与 BC 交于 D'，由塞瓦定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE}{AE}=1,$$

比较两式，有 $\frac{BD'}{D'C}=\frac{BD}{DC}$，$D'$ 与 D 重合，故 AD、BE、CF 平行或共点，命题得证.

§5.3 定理的变形与推广

1. 将塞瓦定理中的线段换为角度

定理 5.1 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC、AC、AB 上的点，AD 与 AB、AC 的夹角分别为 α_1、α_2，BE 与 BC、BA 的夹角分别为 β_1、β_2，CF 与 CA、CB 的夹角分别为 γ_1、γ_2. 若 AD、BE、CF 平行或共点，则

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1.$$

证明 如图 5-2 所示，依塞瓦定理及正弦定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{\frac{CA}{\sin\gamma}\sin\gamma_1\ \frac{AB}{\sin\alpha}\sin\alpha_1\ \frac{BC}{\sin\beta}\sin\beta_1}{\frac{BC}{\sin\gamma}\sin\gamma_2\ \frac{CA}{\sin\alpha}\sin\alpha_2\ \frac{AB}{\sin\beta}\sin\beta_2}$$

$$=\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}=1.$$

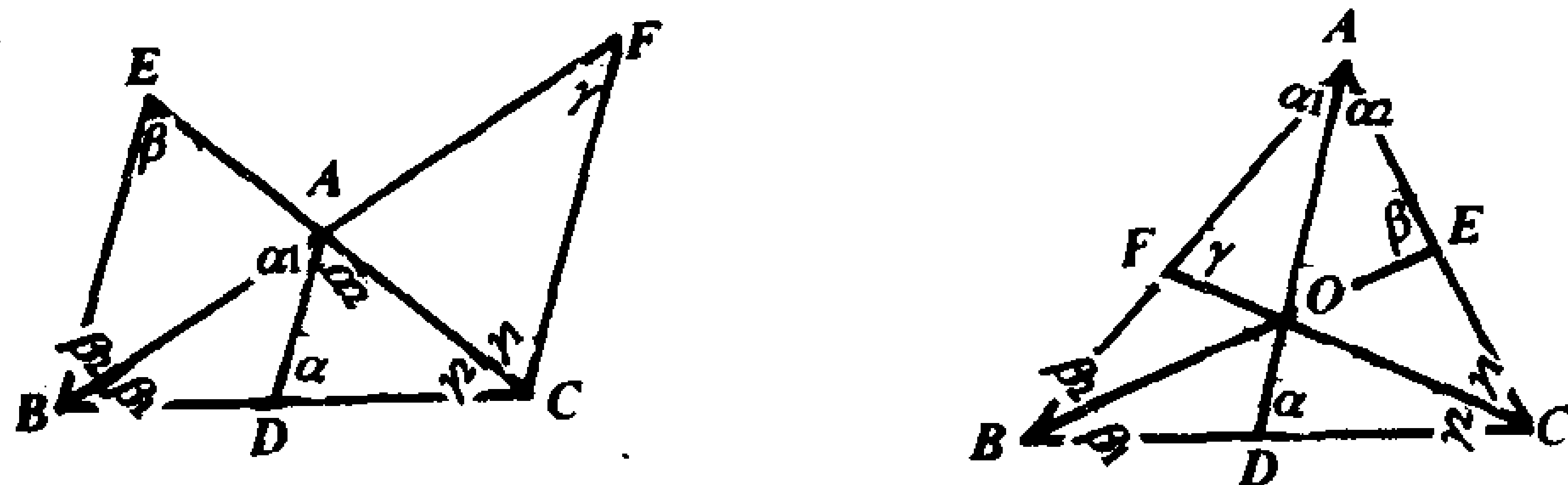


图 5-2

故定理 5.1 与塞瓦定理是等价的，所以还有逆命题成立.

定理5.2 若D、E、F分别是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB上的点，AD与AB、AC的夹角分别为α_1、α_2，BE与BC、BA的夹角分别为β_1、β_2，CF与CA、CB的夹角分别为γ_1、γ_2.

若 $$\frac{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}=1,$$

则AD、BE、CF平行或共点.

2. 将三线共点或平行推广为两两相交

定理5.3 若D、E、F分别为$\triangle ABC$三边BC、CA、AB上的点，$\frac{AF}{FB}=\lambda_1$，$\frac{BD}{DC}=\lambda_2$，$\frac{CE}{EA}=\lambda_3$，AD、BE、CF相交得$\triangle PQR$(图 5-3)，则

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}.$$

证明 因为 CRF截$\triangle ABD$.由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AR}{RD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AR}{RD} \cdot \frac{1}{1+\lambda_2} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AR}{RD} = \lambda_1(1+\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \frac{AR}{AD} = \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}.$$

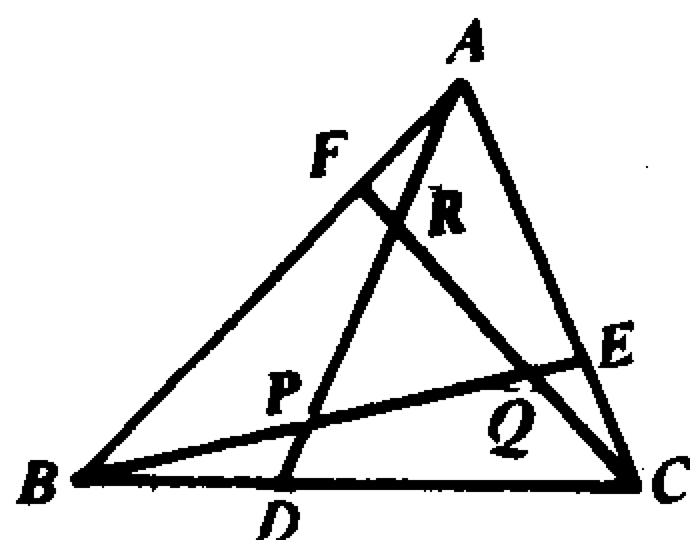


图 5-3

所以 $$S_{\triangle ARC} = \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} S_{\triangle ADC}$$

$$= \frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} \cdot \frac{1}{1+\lambda_2} \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} S_{\triangle ABC}.$$

同理有 $$S_{\triangle ABP} = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3} S_{\triangle ABC},$$

$$S_{\triangle BCQ} = \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1} S_{\triangle ABC}.$$

从而 $$S_{\triangle PQR} = \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\right)\right] S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)} S_{\triangle ABC}$$

所以 $$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}$$

显然当 AD、BE、CF 交于一点时,$S_{\triangle PQR} = 0$. 有 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$,为塞瓦定理(三线共点的情形);反之,由 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$(因 AD、BE、CF 必两两相交),又导出 $S_{\triangle PQR} = 0$,即三线共点.

§5.4 定理的应用

用塞瓦定理证三线共点问题有特殊效应.

例 5.1 证明三角形的三条高交于一点.

证明 如图 5-4,因为 $\alpha_1 = \gamma_2$,

$\beta_1 = \alpha_2, \gamma_1 = \beta_2$，所以有

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1.$$

又 AC、BC 相交，故其垂线 AD、BE 不平行，由定理 5.2，有 AD、BE、CF 共点.

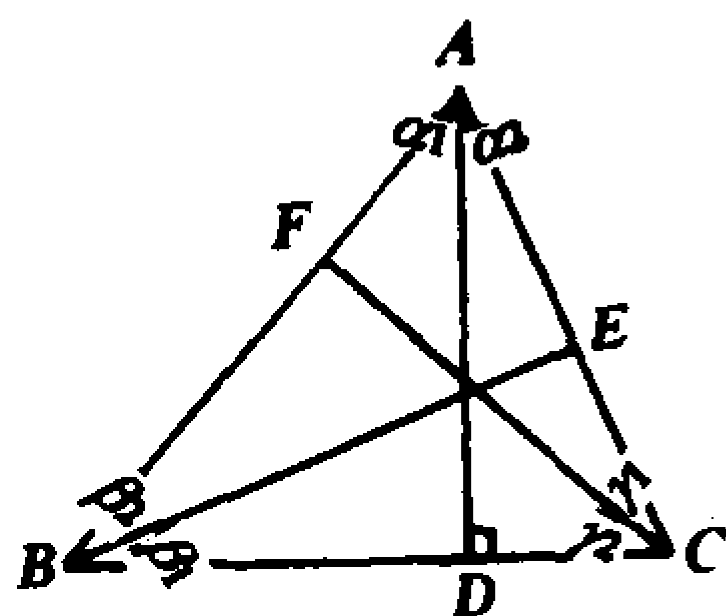


图 5-4

例 5.2 证明三角形三内角平分线交于一点.

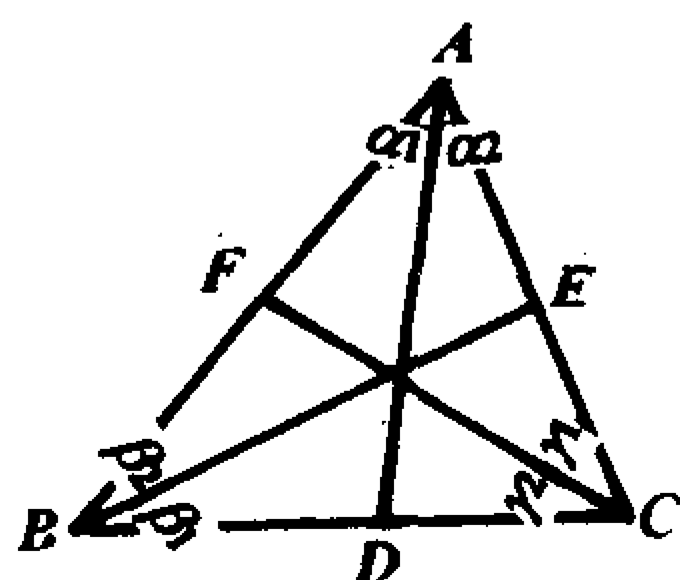


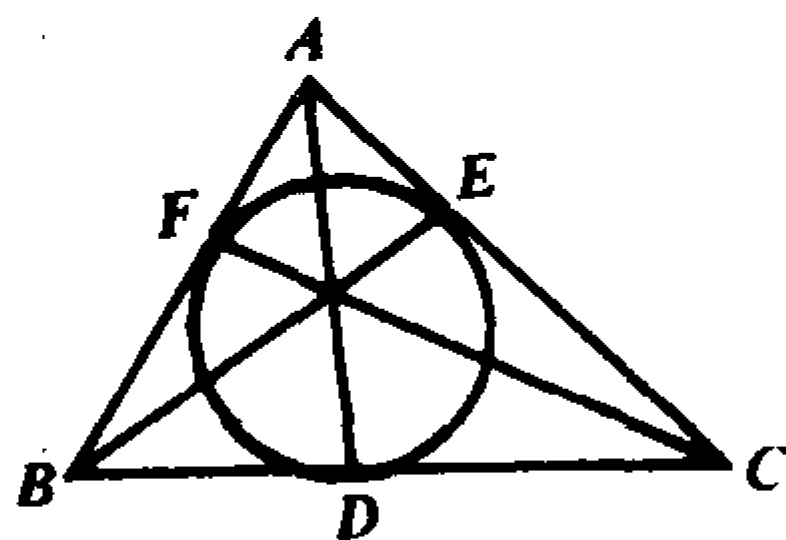
图 5-5

证明 如图 5-5，因 $\alpha_1 = \alpha_2$、$\beta_1 = \beta_2$、$\gamma_1 = \gamma_2$，

所以 $$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1.$$

故三角平分线 AD、BE、CF 交于一点.

例 5.3 设点 D、E、F 是 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆在边 BC、CA、AB 或延长线上的切点，则 AD、BE、CF 共点.



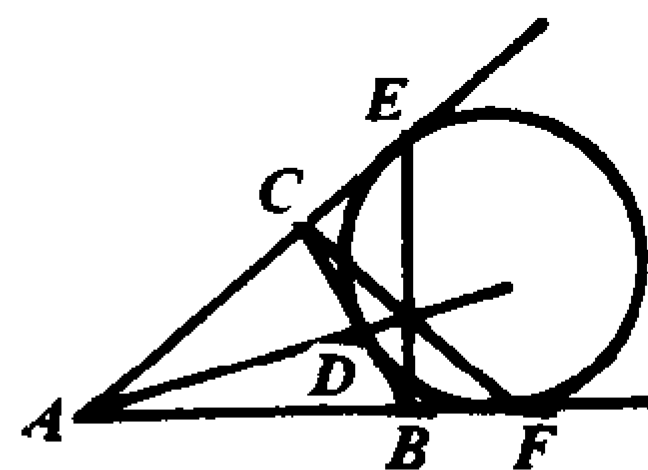


图 5-6

证明 如图 5-6，据切线长定理，有 $EA = AF$、$FB = BD$、$DC = CE$，

所以 $$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

故 AD、BE、CF 共点.

例 5.4 $\triangle ABC$ 的三个旁切圆分别与边 BC、CA、AB 相

切于点 D、E、F，则 AD、BE、CF 共点(图 5-7).

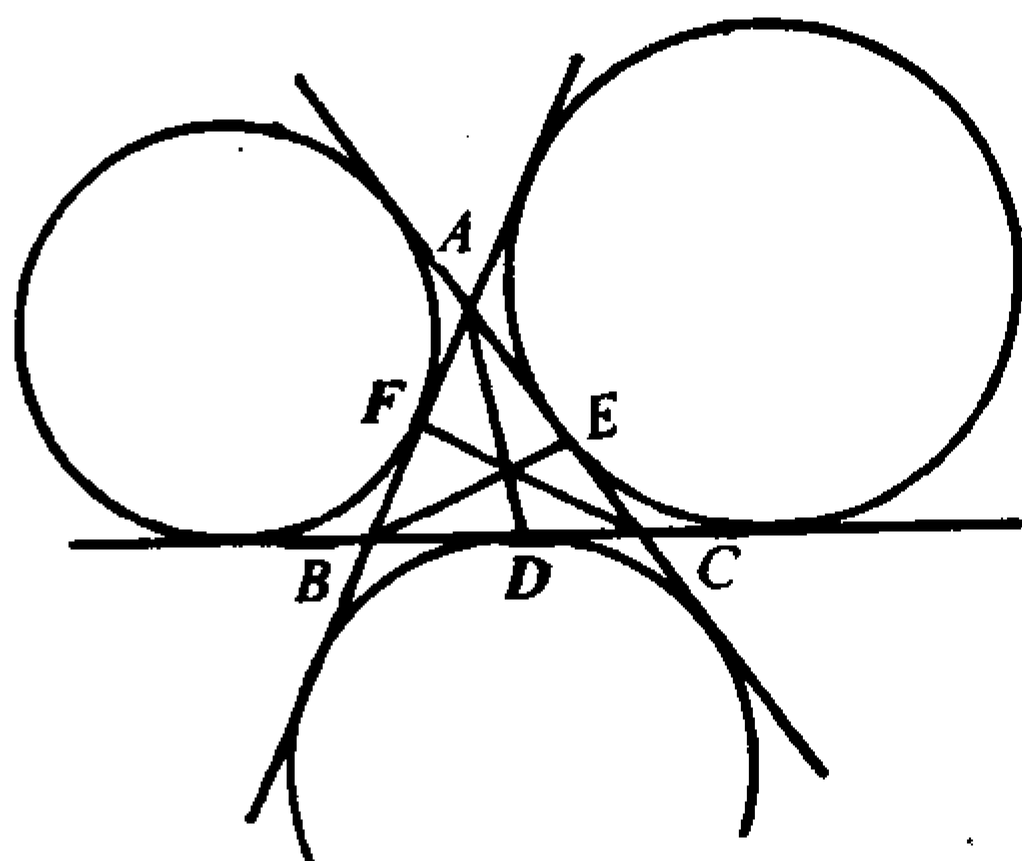


图 5-7

证明　设 $\triangle ABC$ 三边为 a、b、c，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

因为　$AF=p-b=CD$,

$AE=p-c=BD$,

$BF=p-a=CE$.

有　$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$,

所以　AD、BE、CF 共点.

例 5.5　通过三角形顶点并分(内分)对边成为与邻边平方成比例的两部分的直线交于一点.

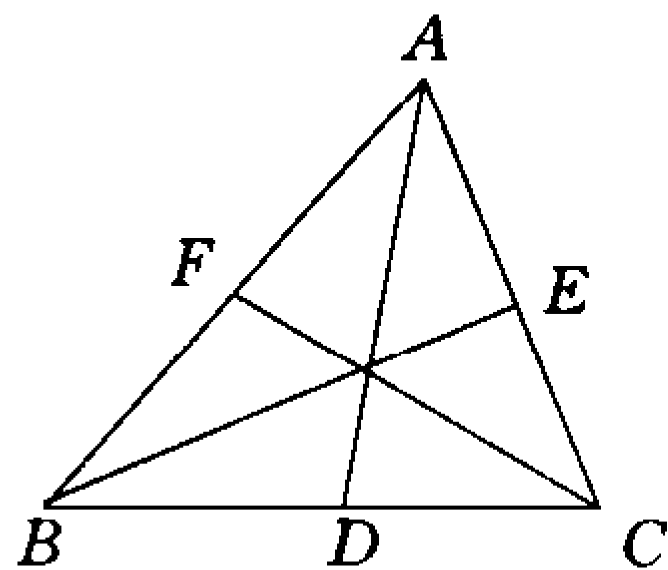


图 5-8

证明　(如图 5-8) 设三边为 a、b、c.

因为　$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}$

$=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}=1.$

所以　AD、BE、CF 共点.

练习与思考

1. 求证三角形三条中线交于一点.

2. 平行于 $\triangle ABC$ 的边 BC 的直线交 AB、AC 于 D、E，BE、CD 交于 S. 则 AS 的延长线必过 BC 边的中点 F.

3. S 为 $\triangle ABC$ 的中线 AF 上的任意一点，BS 交 AC 于 E，CS 交 AB 于 D，求证 $DE\parallel BC$.

4. 已知 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边上的点，且 $\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=2$. AD 与 BE、CF 交于 P、Q，BE 交 CF 于 R，问 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle PQR$ 面积的几倍？

第六章　秦九韶公式

§6.1　公　　式

秦九韶公式　设三角形三边分别为 a、b、c，则三角形面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2}.$$

这就是著名的秦九韶公式，也叫三斜求积公式.

秦九韶（字道古，公元 1202 ～ 1261 年），南宋数学家，与李冶、杨辉、朱世杰齐名，同为我国数学黄金时代宋元时期的四大数学家.

秦九韶在其数学巨著《数书九章》卷五中，所述的第二题是："问沙田一段，有三斜（三角形三边），其小斜一十三（小边 $c=13$）里，中斜一十四（中边 $b=14$）里，大斜一十五（大边 $a=15$）里，里法三百步（每 300 步 1 里）. 欲知为田几何？""答曰：田积三百一十五顷（每 100 亩为 1 顷）."

"术曰：以少广求之，以小斜幂（c^2）并大斜幂（加 a^2）减中斜幂（b^2），余半之（除以 2），自乘（平方）于上；以小斜幂乘大斜幂减上（用 c^2a^2 减去上式），余四约之（除以 4），为实；一为从隅，开平方得积."

对于方程 $px^2=q$，秦九韶将 q 称为实，p 称为隅. "一为从隅"即 $p=1$. 其求法即为

$$S^2=\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2}.$$

这就是秦九韶的三斜求积公式.

实际上这个公式中的三斜具有"对称性"，a、b、c 只要分别表示三边即可，不一定专指大斜、中斜、小斜.

若令 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，将上式 S^2 右端作如下变形：

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{16}[(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2]\\&=\frac{1}{16}[(c+a)^2-b^2][b^2-(c-a)^2]\\&=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(b+a-c)\\&=p(p-a)(p-b)(p-c).\end{aligned}$$

得 $$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\qquad(*)$$

上述公式西方称为海伦（见第二章）公式，相传这个公式是海伦发现的. 其实早在古希腊时，阿基米德（Archimedes，公元前 287 ～ 前 212 年）就已知道了这一公式，海伦在他的著作《量度》一书中给出了这一公式的一个证明，遂以得名.

在长期封闭的中国封建社会，秦九韶的"三斜求积公式"是完全独立发现的，海伦公式显然是秦九韶公式的一个推论，而海伦只是证明了这个公式，因此我们应称（ * ）式为秦九韶 - 海伦公式.

§6.2 公式的证明

首先我们介绍秦九韶本人对"三斜求积公式"的证法.

证明 1 如图 6-1(a)，作高 $AD=h$，设 $BD=m$，$DC=n$.

由 $S=\frac{1}{2}ah$ （古代称为圭田求积法）

自乘得 $S^2=\frac{1}{4}a^2h^2$ ①

由勾股定理 $h^2=c^2-m^2$ ②

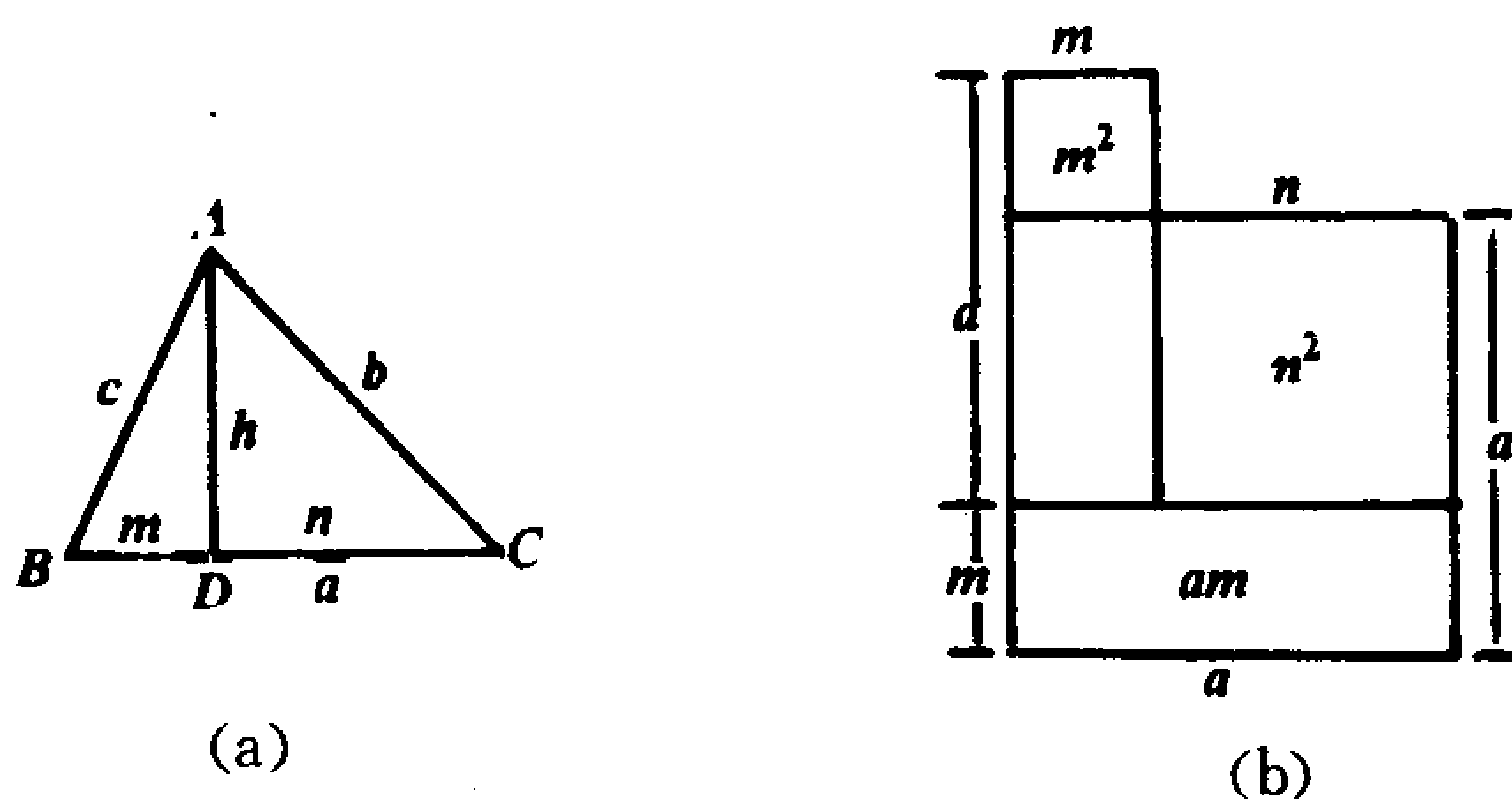
将②代入①得

$$S^2=\frac{1}{4}a^2(c^2-m^2)=\frac{1}{4}(a^2c^2-a^2m^2)$$ ③

又依②得 $b^2=h^2+n^2=c^2-m^2+n^2$ ④

从图 6-1(b),由演段法得知

$$n^2=a^2+m^2-2am$$ ⑤



(a) (b)

图 6-1

以⑤代入④得

$$b^2=c^2-m^2+a^2+m^2-2am=c^2+a^2-2am,$$

$$m=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}.$$

代入③得:$S^2=\frac{1}{4}\left[c^2a^2-a^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2\right]$

$$=\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right].$$

所以 $S=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2}.$

即“三斜求积公式”得证.

下面我们来证明秦九韶-海伦公式.

证法 2 同证法 1 所设,有

$$c^2=h^2+m^2 \quad ⑥$$

$$b^2=h^2+n^2 \quad ⑦$$

⑥ − ⑦ 得 $c^2-b^2=(m+n)(m-n)=a[m-(a-m)]$

$$=2am-a^2,$$

$$m=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

于是有,$h^2=c^2-m^2$

$$=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{4a^2}$$

$$=\frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}$$

$$h=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

所以 $S=\frac{1}{2}ah=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

证法 3 所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

所以 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

化简整理得 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

证法4 如图6-2,设O、O'分别为$\triangle ABC$的内心与旁心,r、R是$\odot O$、$\odot O'$的半径,D、E是切点,易知$AE=p$,$AD=p-a$,$DB=p-b$,$BE=p-c$,由于$\angle OBO'=90°$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle BOD\backsim\mathrm{Rt}\triangle O'BE$,

所以$\frac{OD}{BE}=\frac{BD}{EO'}$，

即 $\frac{r}{p-c}=\frac{p-b}{R}$

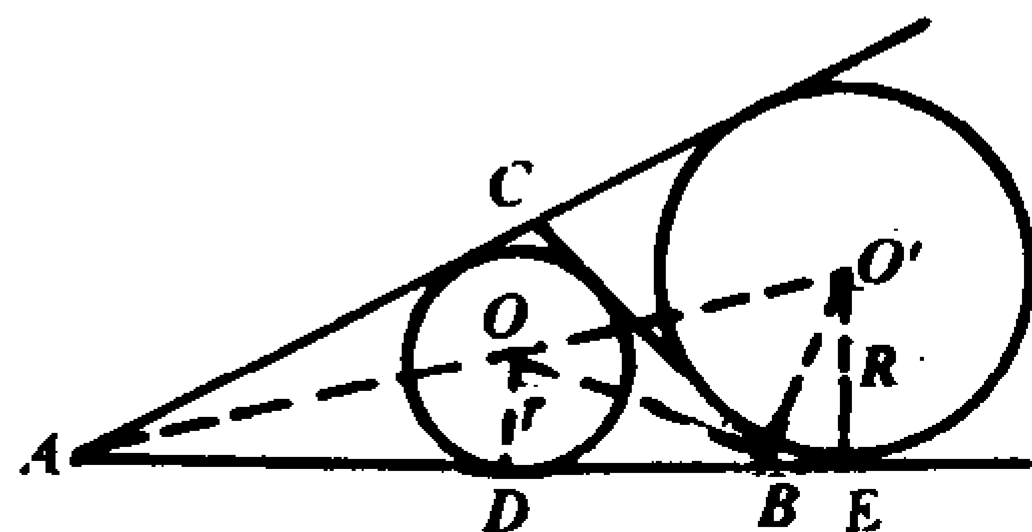


图 6-2

得 $R=\frac{(p-b)(p-c)}{r}$ ⑧

又 $\triangle AOD \backsim \triangle AO'E$，

因为 $\frac{OD}{O'E}=\frac{AD}{AE}$，即$\frac{r}{R}=\frac{p-a}{p}$ ⑨

由 ⑧、⑨ 可得

$$S=pr=(p-a)\cdot R=\frac{(p-a)(p-b)(P-c)}{r}$$

$$=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{S}$$

所以 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

证法 5 如图 6-3 所设，⊙O 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，则

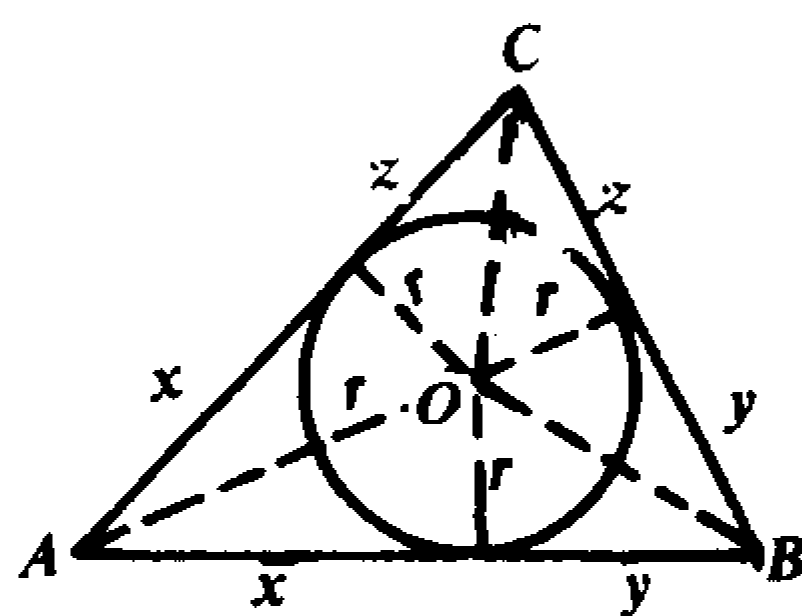


图 6-3

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{x}$，$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{y}$，$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{z}$，

因为 $\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{-1}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$

$$=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$

所以 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$.

即有 $\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}+\frac{r}{y}\cdot\frac{r}{z}+\frac{r}{z}\cdot\frac{r}{x}=1$

所以 $r^2(x+y+z)=xyz$,

$r^2p=(p-a)(p-b)(p-c)$,

所以 $S^2=(rp)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

证法 6 如图 6-3,

所以 $\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}$, $\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$,

所以
$$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$
$$=bc\cdot\frac{r}{\sqrt{x^2+r^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$
$$=\frac{bc\cdot r\cdot x}{x^2+r^2}=pr$$

$$\Rightarrow pr^2=(bc-px)x=[(x+z)(x+y)-(x+y+z)x]x$$
$$=xyz,$$

所以 $S^2=(rp)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$,

所以 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

当然,本公式还有行列式证法、复数证法和其它方法.

§6.3 公式的推广

1. 将三角形向圆内接四边形推广

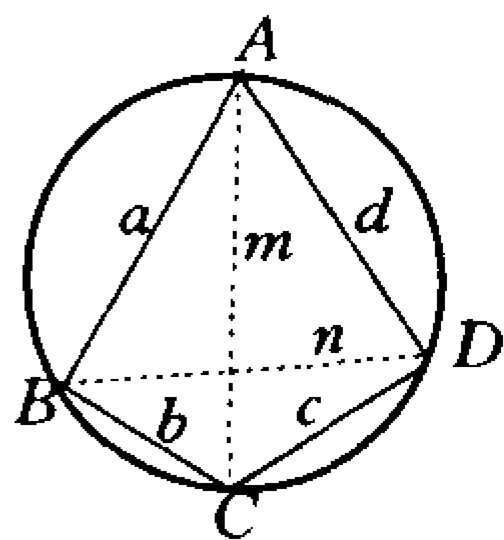


图 6-4

定理 6.1 设 $ABCD$ 为圆内接四边形, $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$,设 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$,则

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

证明 如图 6-4,设 $AC=m, DB=n$,由贝利契纳德(Bretschneider)公式和托勒密定理(见第七章),有

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2-[a^2-b^2+c^2-d^2]^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{4(ac+bd)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+c+d-b)}$$
$$\cdot\sqrt{(a+b+d-c)(b+d+c-a)}$$
$$=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

显然当$d=0$时，四边形变为三角形，秦九韶—海伦公式为其特例.

2. 向任意四边形推广

定理 6.2 在四边形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，$\angle A+\angle C=2\theta$，则四边形面积

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}.$$

证明 如图 6-5，

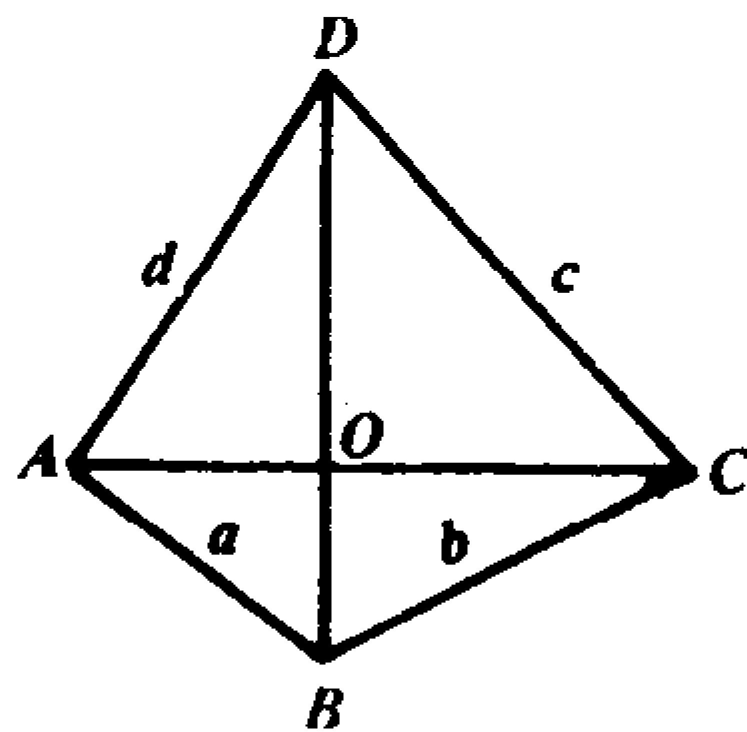


图 6-5

所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}ad\sin A$，

$$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}bc\sin C,$$

所以 $$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$$

$$4S^2=(ad\sin A+bc\sin C)^2.$$

而 $$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos C.$$

所以 $$ad\cos A-bc\cos C$$
$$=-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2-d^2).$$

故 $$4S^2+\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$$

$$= (ad\sin A + bc\sin C)^2 + (ad\cos A - bc\cos C)^2$$
$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos 2\theta$$
$$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= (ad + bc)^2 - 4abcd\cos^2\theta.$$

于是
$$16S^2 = 4(ad + bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\theta$$
$$= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd\cos^2\theta$$

所以
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\theta}.$$

显然当 $2\theta = 180°$ 时，四边形为圆内接四边形，定理 6.2 即为定理 6.1. 定理 6.2 还表明，在四边形四边一定的情况下，以内接于圆的四边形面积最大.

3. 向四面体推广

定理 6.3 设四面体共顶点的三条棱的长为 a、b、c，α、β、γ 是其相邻的棱组成的面角，ω 是这三个面角之和的一半，则四面体体积

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin\omega\sin(\omega-\alpha)\sin(\omega-\beta)\sin(\omega-\gamma)}.$$

这与秦九韶 — 海伦公式也是极相似的.

如果我们把秦九韶的“三斜求积”公式

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}\right)^2}$$

变形，整理，可得已知三角形三边求面积的“三边求积”公式

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} \quad ①$$

对四面体也有类似的“六棱求积”公式，这即是

定理 6.4 若四面体某一个面的三条棱长为 a'、b'、c'，它们的相对棱的长分别为 a、b、c，记

$$P=(aa')^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2),$$
$$Q=(bb')^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2),$$
$$R=(cc')^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2),$$
$$S=(a'b'c')^2+(a'bc)^2+(b'ca)^2+(c'ab)^2.$$

则四面体的体积为

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{P+Q+R-S}.$$

与①式酷似，公式中的 P、Q、R 分别为四面体相对（即互为异面）两棱积的平方乘以另外四条棱的平方和与这对棱的平方和的差所得的积；公式中的 S 为四面体每个面上三条棱的积的平方和. 抓住这些特点，“六棱求积”公式也就容易记住了.

定理 6.3、定理 6.4 的证明超出本书的范围，这里略去.

§6.4　公式的应用

例6.1　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=14$，$BC=13$，$CA=15$ 有一圆圆心在 AB 上，且分别与 AC、BC 相切，求此圆的半径.

解　如图 6-6，设圆 O 的半径为 R，切点为 D、E，连 OD、OE，则 $OD=OE=R$，且 $OD\perp AC$，$OE\perp BC$.

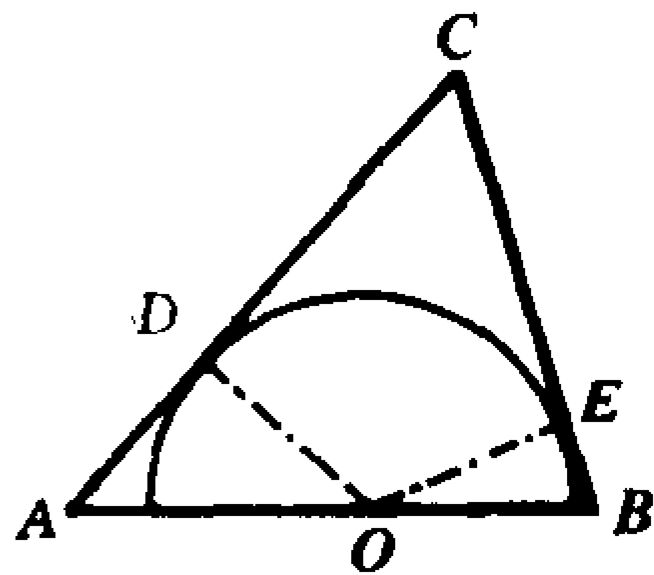


图 6-6

因为　$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle OBC}=S_{\triangle ABC}$

由秦九韶 - 海伦公式，有

$$\frac{15}{2}R+\frac{13}{2}R=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}.$$

解之得　$R=6$，即圆 O 的半径为 6.

例6.2　已知三角形三边的比是 9∶10∶17，它的面积是 144 平方米，求这个三角形的各边的长.

解 设三角形三边分别为 $9k$、$10k$、$17k$，由秦九韶－海伦公式，有

$$144=\sqrt{18k(18k-9k)(18k-10k)(18k-17k)}.$$

解之得 $k=2$，故三角形三边分别为 18 米、20 米、34 米.

例 6.3 证明同时有外接圆和内切圆的四边形，它的面积等于四边连乘积的平方根.

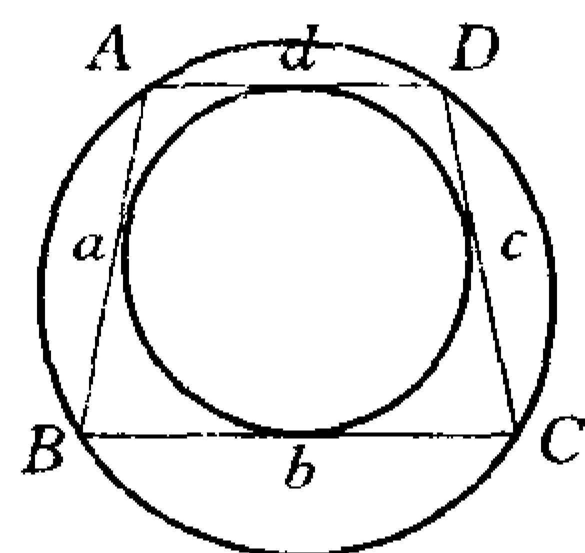


图 6-7

证明 如图 6-7，

因为 $p=a+c=b+d$，

所以 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
$=\sqrt{abcd}$.

练习与思考

1. 已知 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，求高 h_a、h_b、h_c.

2. 已知 $\triangle ABC$ 三边为 a、b、c，求内切圆半径 r 和外接圆半径 R.

3. 边长和面积都为整数的三角形称为海伦三角形. 其边长构成的数组称为海伦数组. 如：

(5,5,6)，(13,20,21)，(25,51,52)

(41,104,105)，……，(a_n,b_n,c_n)

设半周长为 p_n，写出 a_n、p_n 与 n 的关系式，并求出 a_n、b_n 在 c_n 上的射影，观察它们有什么美妙性质.

4. 三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 的长分别为 a、b、c，又 $\angle ASB=60°$，$\angle ASC=\angle BSC=90°$，求此棱锥的体积.

第七章　托勒密定理

§7.1　定　　理

托勒密定理　圆内接四边形的两组对边乘积之和等于两对角线的乘积.

托勒密(C. Ptolemy,约公元 85 ～ 165 年)是埃及天文学、地理学家,也是三角学的先驱者之一.他的研究对科学的许多领域(数学、物理学、地理学、特别是天文学)都具有重要意义,在《天文学的伟大数学结构》(共十三卷)这部著作中,托勒密力图从数学上论证自己的地心系学说.在波兰天文学家哥白尼(Copernius,1473 ～ 1543 年)建立正确反映现实世界的日心系之前,托勒密体系统治了 14 个世纪.托勒密还以下列事实而闻名.他第一个怀疑欧几里得平行线公设的明显性,试图推证出它的正确性来,这为后来许多几何学家类似的尝试开了个头,一直到罗巴切夫斯基(Лобачевский,1792 ～ 1856 年)才从这种失败的尝试中"醒悟"而发现了非欧几何.在《数学上的语法》(Mathematical Syntaxis)这部主要著作中,托勒密继承了吉巴尔赫的算弦术以及孟纳与毕达哥拉斯的几何成果,同时利用上述定理有效地改进了计算弦长的方法.他根据两个已知弧所对的弦长,求出这两个弧的和或差所对的弦长,以及已知弧的一半所对的弦长.并使用 60 进制的分数,列出从 0° 到 180° 每相差 0.5° 的弦长表,这就是第一个三角函数表,拿他的这张表与今天的正弦函数表比较,便可知他的计算

是十分精确的.上述定理其实在他之前就有了,但这个定理对计算这张表是必不可少的,托勒密把它作为引理给予证明,故因此而命名.

§7.2　定理的证明

探索托勒密定理的证明,是件有趣味的事,下面仅给出有代表性的四种证法.

证法1　如图7-1,在BD上取点P,使$\angle PAB=\angle CAD$,则　$\triangle ABP \backsim \triangle ACD$ 于是

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BP \tag{1}$$

又　$\triangle ABC \backsim \triangle APD \Rightarrow \dfrac{BC}{PD}=\dfrac{AC}{AD}$

$$\Rightarrow BC \cdot AD = AC \cdot PD \tag{2}$$

①+②得

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (BP + PD) = AC \cdot BD.$$

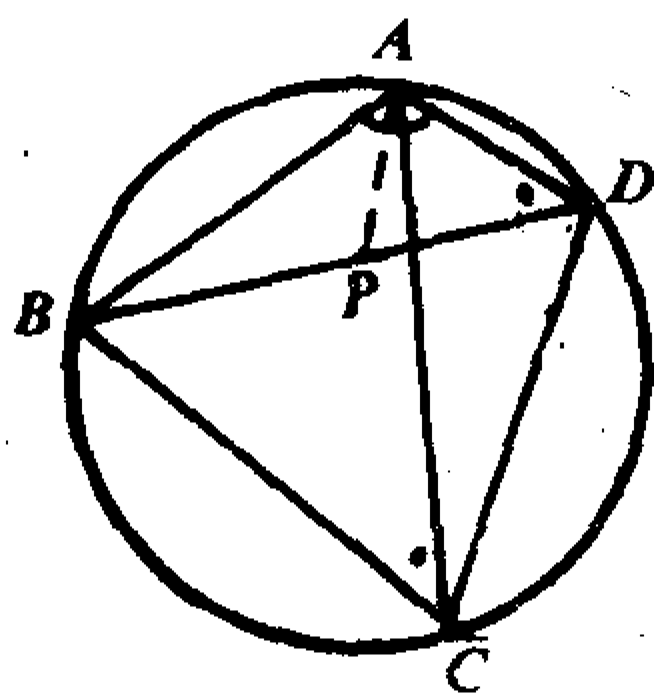


图 7-1

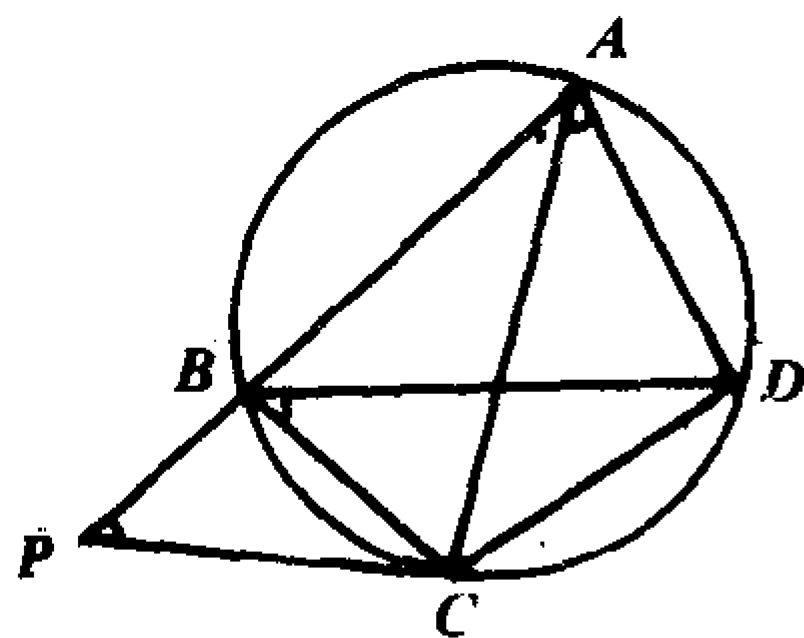


图 7-2

证法2　如图7-2,在AB延长线上取点P,使$\angle PCA=\angle DCB$,则　$\triangle ACP \backsim \triangle DCB$,

于是　$$\frac{AC}{CD}=\frac{AP}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = CD \cdot AP \tag{3}$$

又由　$\angle CBP=\angle ADC$,$\angle BPC=\angle CBD=\angle CAD$,得$\triangle ACD \backsim \triangle PCB$.

所以 $\dfrac{AD}{PB}=\dfrac{CD}{BC}\Rightarrow AD\cdot BC=CD\cdot PB$ ④

③ − ④ 得 $AC\cdot BD-AD\cdot BC=CD(AP-PB)$

$$=AB\cdot CD$$

即 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$.

证法 3 如图 7-3，作 $AE\,/\!/\,BD$ 交圆于 E，连 EB、EC、ED，则

$AEBD$ 为等腰梯形，$EB=AD$，$ED=AB$，$\angle ABD=\angle BDE=\alpha$，且 $\angle EBC+\angle EDC=180°$.

因为 $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AGD$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle EDC. \quad ⑤$$

又 $S_{EBCD}=S_{\triangle EBC}+S_{\triangle ECD}$

$$=\frac{1}{2}EB\cdot BC\cdot\sin\angle EBC+\frac{1}{2}ED\cdot DC\cdot\sin\angle EDC$$

$$=\frac{1}{2}(EB\cdot BC+ED\cdot DC)\cdot\sin\angle EDC$$

⑥

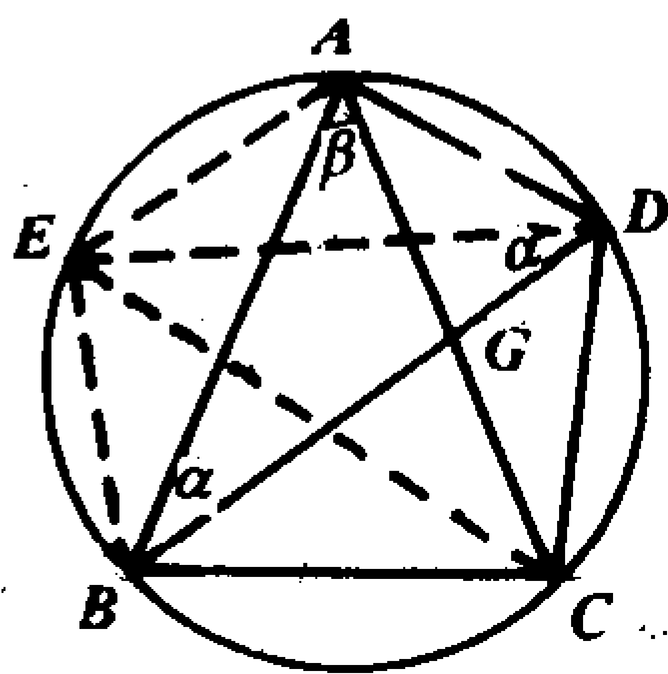


图 7-3

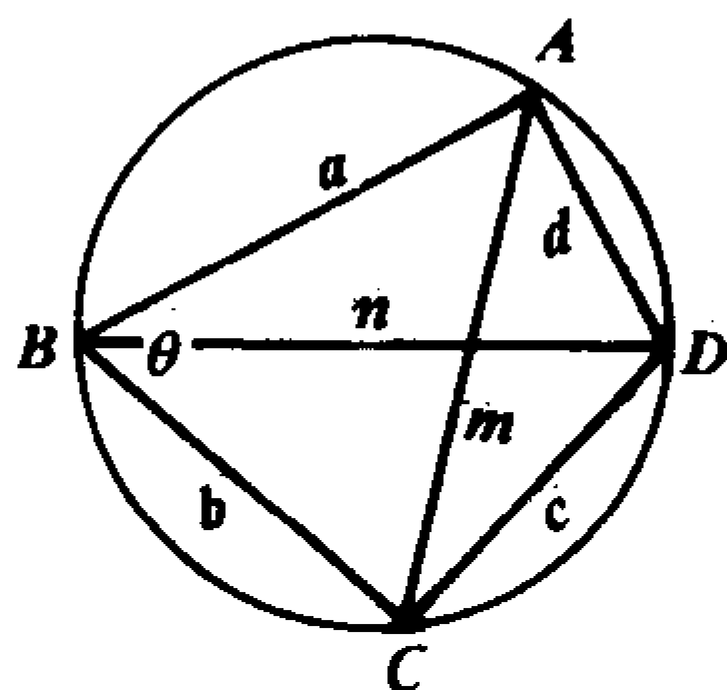


图 7-4

易知 $S_{ABCD}=S_{EBCD}$，比较⑤、⑥，并将 $EB=AD,ED=AB$ 代入即得

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC+AB\cdot DC.$$

证法 4　如图 7-4 所设，$AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AC=m,BD=n,\angle ABC=\theta$，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中依余弦定理有

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad ⑦$$

$$m^2=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=c^2+d^2+2cd\cos\theta \quad ⑧$$

⑦ $\times cd+$ ⑧ $\times ab$ 得

$$(ab+cd)m^2=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2).$$

$$m=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

同理有

$$n=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

两式相乘即得 $mn=ac+bd$.

在例 22.3 中我们还可以看到它的另一有趣的证明.

§7.3　定理的推广

1. 向直线上推广

如果我们把 $\overset{\frown}{AD}$ 剪开，展成直线(即当圆的半径无穷大时)，托勒密等式也成立. 即

定理 7.1　若 A、B、C、D 为一直线上依次排列的四点，则 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.

证明　如图 7-5，有

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

$= AB \cdot CD + BC \cdot (AC + CD)$

$= AB \cdot CD + BC \cdot CD + AC \cdot BC$

$= (AB + BC) \cdot CD + AC \cdot BC$

$= AC \cdot (CD + BC) = AC \cdot BD$.

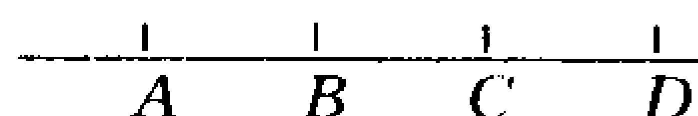


图 7-5

2. 向任意四边形推广

定理 7.2 设 $ABCD$ 为任意四边形，则有

$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$. 当且仅当 A、B、C、D 共圆时取等号.

证明 如图 7-6，取点 E，使 $\angle BAE = \angle CAD$，$\angle ABE = \angle ACD$. 则

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD \Rightarrow \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AC}{CD} \Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BE$ ⑨

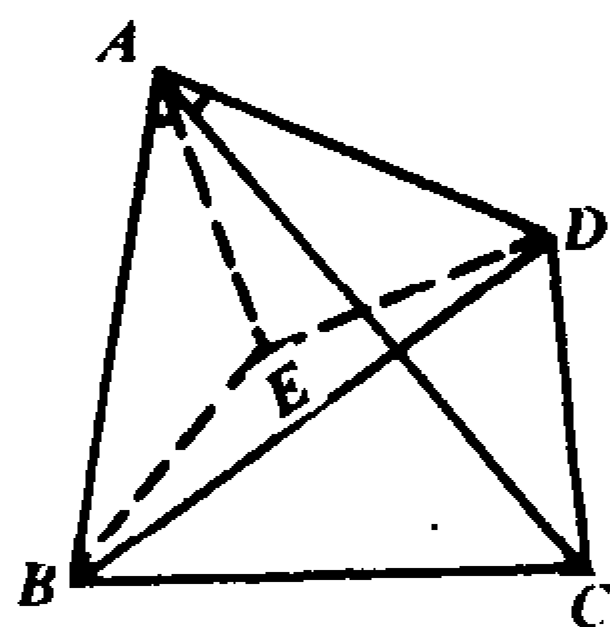


图 7-6

又由 $\left.\begin{aligned} &\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{AC}{AB} \\ &\angle DAE = \angle CAB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ADE$

$\backsim \triangle ACB \Rightarrow \dfrac{AD}{ED} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot ED$ ⑩

⑨ + ⑩ 得 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot (BE + ED)$.

因为 $BE + ED \geqslant BD$,

所以 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$.

等号当点 E 在 BD 上，即 $\angle ABD = \angle ACD$ 时成立，由此可知 A、B、C、D 内接于圆，此即表明托勒密定理的逆命题也成立，即有

定理 7.3 在四边形 $ABCD$ 中，若

$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$,

则 A、B、C、D 四点共圆.

为了更进一步地揭示四边形中六条线段间的数量关系，

我们发现还有

定理 7.4 在四边形 $ABCD$ 中，恒有

$(AC\cdot BD)^2=(AB\cdot CD)^2+(BC\cdot AD)^2-2(AB\cdot CD)(BC\cdot AD)\cos\alpha$，其中 $\alpha=B+D$（或 $A+C$）.

证明 如图 7-7，在 AB、AC、AD 上分别取点 B'、C'、D' 使 $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'=AD\cdot AD'=1$，则 B、B'、D'、D 共圆，于是有

$$\triangle AB'D'\backsim\triangle ADB\Rightarrow\frac{B'D'}{BD}=\frac{AB'}{AD}=\frac{AB'\cdot AB}{AD\cdot AB}=\frac{1}{AB\cdot AD}\Rightarrow B'D'=\frac{BD}{AB\cdot AD}\quad ⑪$$

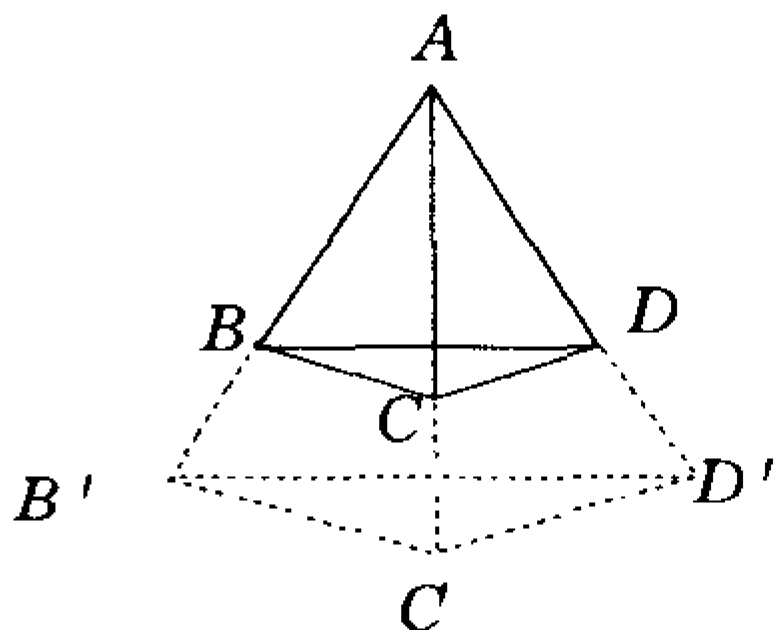


图 7-7

同理，有 B、B'、C'、C 共圆，C、C'、D'、D 共圆，故有

$$B'C'=\frac{BC}{AB\cdot AC}\quad ⑫$$

$$C'D'=\frac{CD}{AC\cdot AD}\quad ⑬$$

在 $\triangle B'C'D'$ 中运用余弦定理，有

$B'D'^2=B'C'^2+C'D'^2-2B'C'\cdot C'D'\cos\angle B'C'D'$ 又 $\angle B'C'D'=\angle B'C'A+\angle AC'D'=\angle ABC+\angle ADC=\alpha$ 且将 ⑪、⑫、⑬ 式代入得

$$\left(\frac{BD}{AB\cdot AD}\right)^2=\left(\frac{BC}{AB\cdot AC}\right)^2+\left(\frac{CD}{AC\cdot AD}\right)^2-2\frac{BC}{AB\cdot AC}\cdot\frac{CD}{AC\cdot AD}\cos\alpha.$$

两边同乘以 $(AB\cdot AC\cdot AD)^2$ 得

$$(AC\cdot BD)^2=(BC\cdot AD)^2+(AB\cdot CD)^2-2(AB\cdot CD)(BC\cdot AD)\cos\alpha.$$

3. 向空间四边形推广

把平面四边形向空间四边形推广，也有类似结论.

定理 7.5 在空间四边形 $ABCD$ 中，恒有

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC > AC \cdot BD.$$

如图 7-8，只要将 $\triangle ABD$ 绕 BD 旋转到 $\triangle BCD$ 所在平面内，然后利用定理 7.2 并注意 $AC < A'C$ 即可得证.

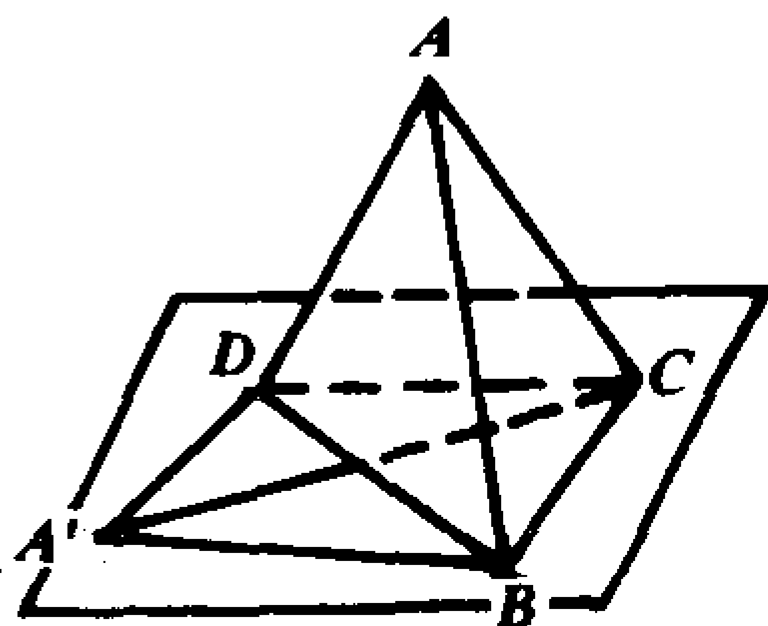


图 7-8

定理 7.6 在空间四边形 $ABCD$ 中，记二面角 $A\text{-}BD\text{-}C$ 为 θ，$\angle BAD = A$，$\angle BCD = C$，则

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot DA)^2 - 2(AB \cdot CD)(BC \cdot DA)(\cos\theta\sin A\sin C + \cos A\cos C) \quad ⑭$$

定理的证明限于篇幅，我们把它略去. 但由公式 ⑭ 不难看出，前面的几个定理都是它的特例.

当 A、B、C、D 共面时，即 $\theta = 180°$，此时

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot DA)^2 - 2(AB \cdot CD)(BC \cdot DA)\cos(A + C) \quad ⑮$$

即为定理 7.4 .

又若 $\theta = 180°$，且 $A + C = 180°$ 即 A、B、C、D 共圆(或共线).

则 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

又若 $\theta = 180°$，将 ⑮ 变形，有

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2 - 2(AB \cdot CD \cdot BC \cdot DA)(1 + \cos\alpha) \leqslant (AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2$$

则 $AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot DA$ 即定理 7.2 .

仿此，从式 ⑭ 出发，同样可以导出定理 7.5.

§7.4 定理的应用

托勒密定理在解题中的应用是灵活而精彩的，下面略举几例.

1. 证勾股定理

例7.1 已知a、b、c为Rt△ABC的三边，c为斜边，求证：$a^2+b^2=c^2$.

证明 如图7-9，作$BD\parallel AC$交△ABC的外接圆于D，则$AD=BC=a$，$BD=AC=b$，$DC=AB=c$，由托勒密定理有$a^2+b^2=c^2$.

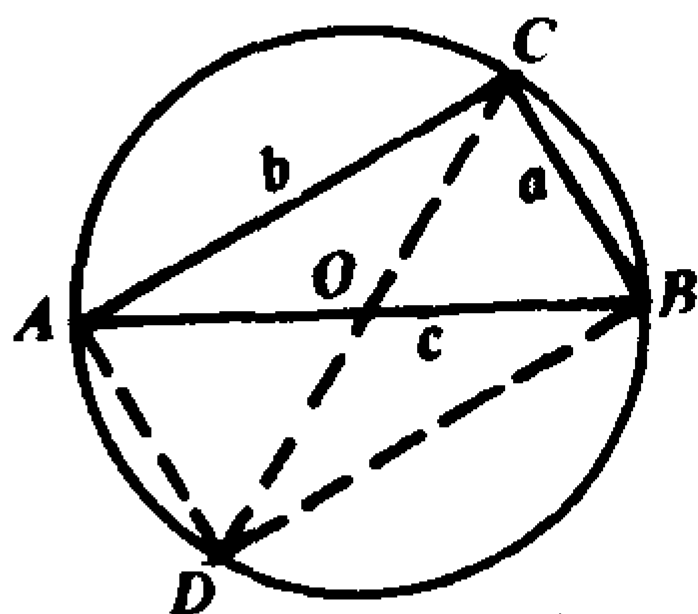


图7-9

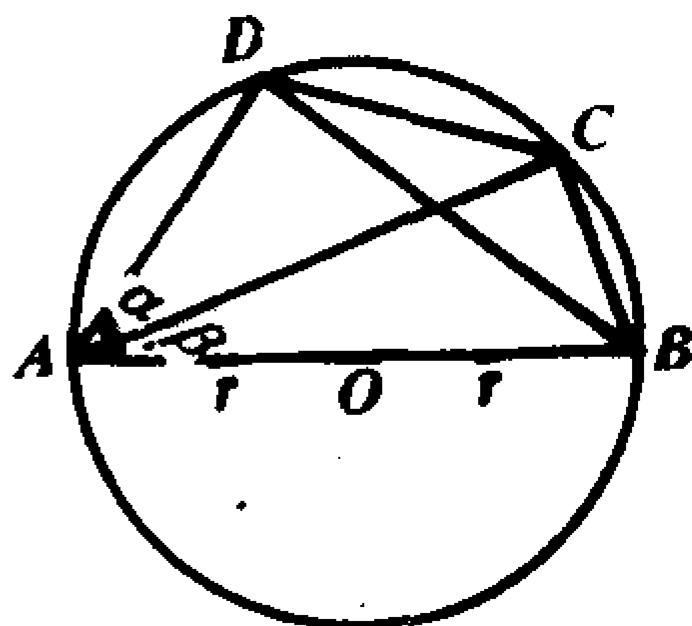


图7-10

2. 推导两角差（或和）的正弦（或余弦）公式

例7.2 求证：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

证明 以$AB=2r$为直径作圆O，且设$\angle BAD=\alpha$，$\angle BAC=\beta$，如图7-10，依次连BC、CD、BD，则有

$AC=2r\cos\beta$，　　$BD=2r\sin\alpha$，

$BC=2r\sin\beta$，　　$AD=2r\cos\alpha$.

由正弦定理有　　$CD=2r\sin(\alpha-\beta)$.

据托勒密定理有　$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$.将前面各式代入上式，约去$4r^2$即得

$$\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta$$

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

读者还可推出 $\sin(\alpha+\beta)$、$\cos(\alpha\pm\beta)$ 的公式.

3. 证线段等式

例 7.3 证明正三角形外接圆上任一点至三顶点的连线中，长者必等于二短者之和.

证明 如图 7-11，设 P 为 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点，正 $\triangle ABC$ 边长为 a，由托勒密定理有： $a\cdot PC+a\cdot PB=a\cdot PA$，

即 $PC+PB=PA$.

例 7.4 已知 A、B、C、D 为圆内接正七边形顺次相邻的四点，求证：$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}$.

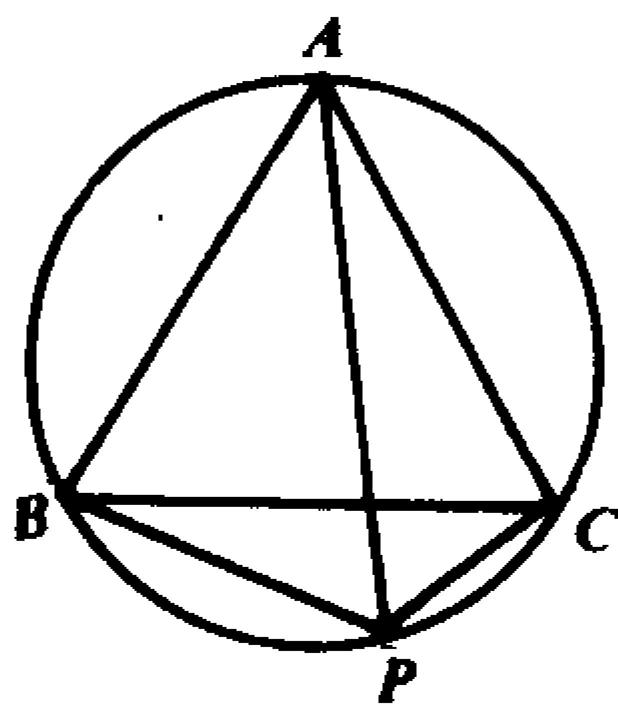


图 7-11

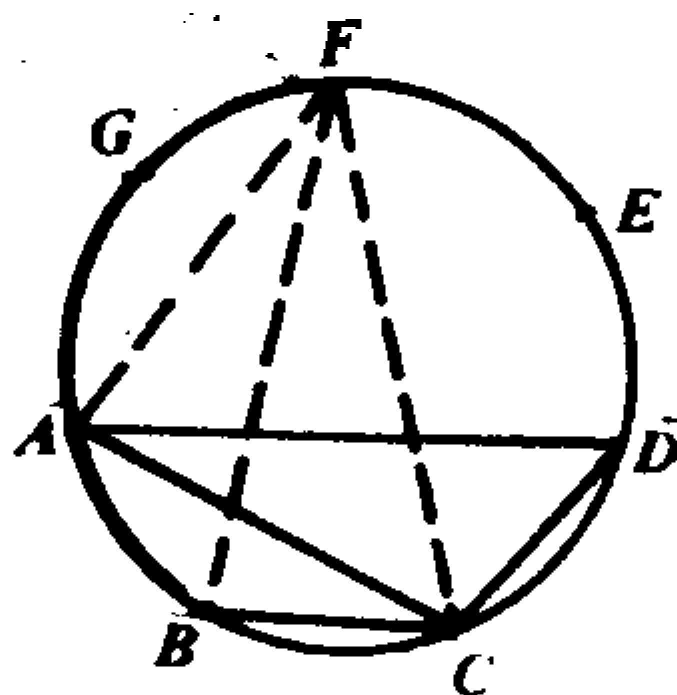


图 7-12

证明 如图 7-12，设 F 为第六个顶点，则有

$$BF\cdot AC=AF\cdot BC+FC\cdot AB.$$

由对称性有

$$AD\cdot AC=AC\cdot AB+AD\cdot AB$$

即 $$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}.$$

4. 证三角等式

例 7.5 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60°$，求证：

$$\frac{\text{tg}A-\text{tg}B}{\text{tg}A+\text{tg}B}=\frac{c-b}{c}.$$

证明 如图7-13，作$\triangle ABC$外接圆的直径CF，并设$AF=x$，$BF=y$，则$\angle BFC=\angle A=60°$，直径$d=2y$.

所以$$\frac{\text{tg}A-\text{tg}B}{\text{tg}A+\text{tg}B}=\frac{\text{tg}\angle BFC-\text{tg}\angle AFC}{\text{tg}\angle BFC+\text{tg}\angle AFC}$$

$$=\frac{\frac{a}{y}-\frac{b}{x}}{\frac{a}{y}+\frac{b}{x}}=\frac{ax-by}{ax+by}$$

$$=\frac{dc-2by}{dc}\quad（由托勒密定理）$$

$$=1-\frac{2by}{dc}=1-\frac{2by}{2yc}=\frac{c-b}{c}$$

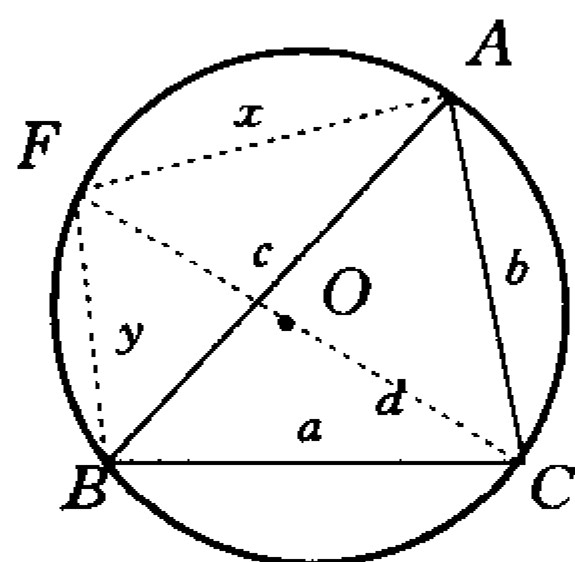


图 7-13

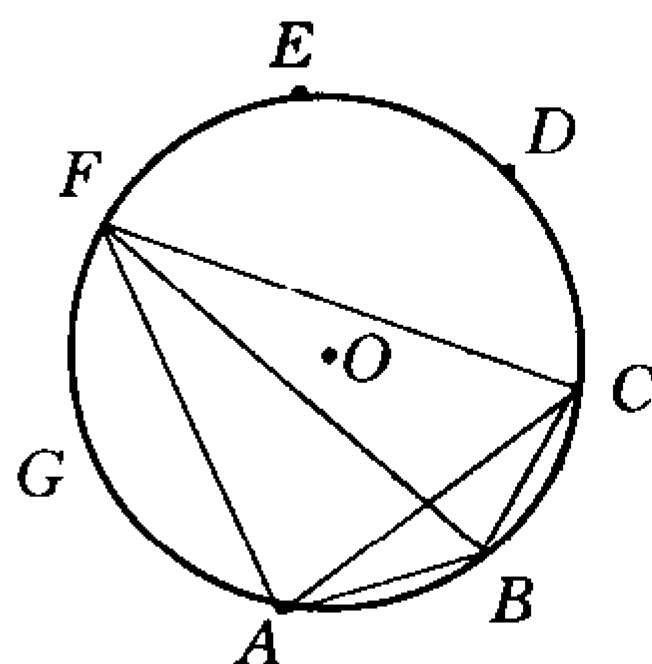


图 7-14

例 7.6 求证：$\csc\frac{\pi}{7}=\csc\frac{2\pi}{7}+\csc\frac{3\pi}{7}$.

分析：欲证式即为

$$\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} \quad ①$$

酷似于托勒密等式.

证明 如图7-14，A、B、C、D、E、F、G为$\odot O$的七等分点，由托勒密定理有

$$AC\cdot BF=AF\cdot BC+AB\cdot FC \quad ②$$

依正弦定理有

$$AC = 2R\sin\frac{2\pi}{7}, BF = 2R\sin\frac{3\pi}{7}, AF = 2R\sin\frac{2\pi}{7},$$

$$BC = 2R\sin\frac{\pi}{7}, AB = 2R\sin\frac{\pi}{7}, FC = 2R\sin\frac{3\pi}{7}.$$

将它们代入②式即得①式，即有

$$\csc\frac{\pi}{7} = \csc\frac{2\pi}{7} + \csc\frac{3\pi}{7}.$$

5. 求比值

例7.7 在$\triangle ABC$中，角A、B、C分别所对的边为a、b、c，且$b-a=a-c$，最大角B与最小角C之差为$90°$，求$a:b:c$

解 作$\triangle ABC$的外接圆O，如图7-15，作$\angle CBD=\angle C$交$\odot O$于D，连AD、DC，则$\angle ABD=90°$，AOD为直径，$ABCD$为等腰梯形.

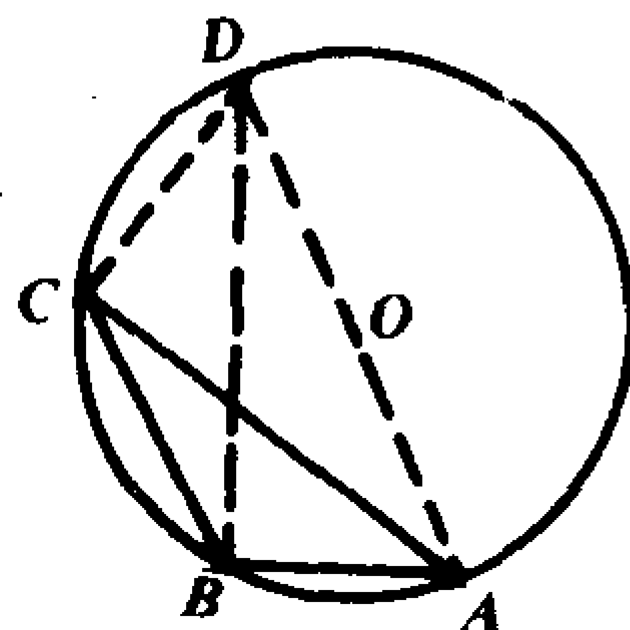


图 7-15

设$b-a=a-c=d$，则$b=a+d$，$c=a-d$，$DC=a-d$，$BD=a+d$.

在Rt$\triangle ABD$中，

$$AD = \sqrt{AB^2+BD^2} = \sqrt{(a-d)^2+(a+d)^2}$$
$$= \sqrt{2(a^2+d^2)},$$

由托勒密定理，有

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a\sqrt{2(a^2+d^2)}$$

化简得 $4d = \sqrt{2(a^2+d^2)}$， 解得$a=\sqrt{7}d$.

所以 $a:b:c = \sqrt{7}:(\sqrt{7}+1):(\sqrt{7}-1)$.

由此题可见，构造等腰梯形，利用托勒密定理解题是一种有效方法.

6. 证不等式

例7.8 若$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=1$，则$|ay+bx|\leqslant 1$.

证明 如图7-16，作$Rt\triangle ABC$，使$AB=1, AC=|a|, BC=|b|$，在其外接圆上取一点D，使$DA=|x|, BD=|y|$连CD，则有

$$|a|\cdot|y|+|b|\cdot|x|=1\cdot CD$$

即 $|ay|+|bx|=CD.$

所以 $|ay+bx|\leqslant|ay|+|bx|=CD\leqslant 1.$

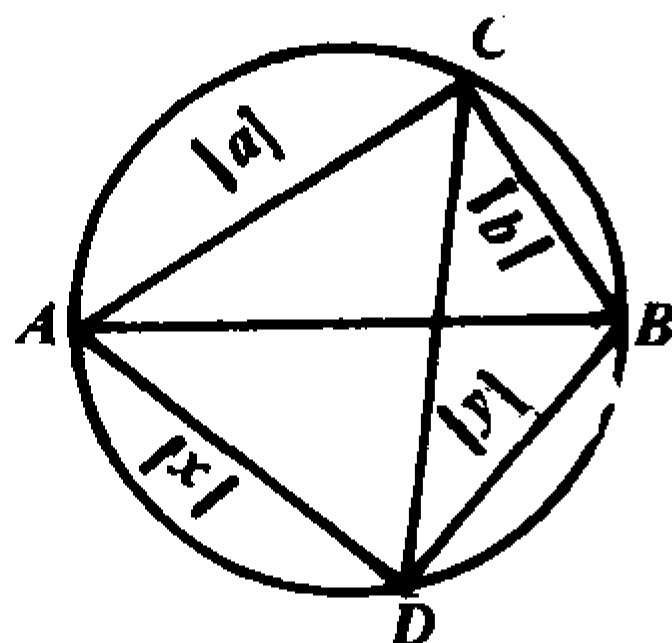


图 7-16

练习与思考

1. 已知等腰梯形$ABCD$，且$AB\,/\!/\,CD$，求证：

$$AC^2=AD^2+AB\cdot CD.$$

2. 在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线AD与$\angle B$的平分线交于I，求证：$\dfrac{AI}{ID}=\dfrac{AB+AC}{BC}$.

3. 过$\square ABCD$的顶点A作一圆，分别交AB、AD及对角线AC于E、F、G. 求证：

$$AC\cdot AG=AB\cdot AE+AD\cdot AF.$$

4. 从距离圆心O有25cm的一点P，向圆引两条切线PA、PB. 若圆的半径是7cm，求两切点A、B间的距离.

5. 已知$|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$. 求证：

$$\left|ab\pm\sqrt{|(1-a^2)(1-b^2)|}\right|\leqslant 1.$$

6. 若$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$.

第八章　角平分线定理

§8.1　定　　理

角平分线定理　三角形的内(外)角平分线分对边所得两条线段与这个角的两边对应成比例.

如图8-1,若P为$\triangle ABC$中$\angle A$的内(外)角平分线与BC的交点,则$\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP}$.

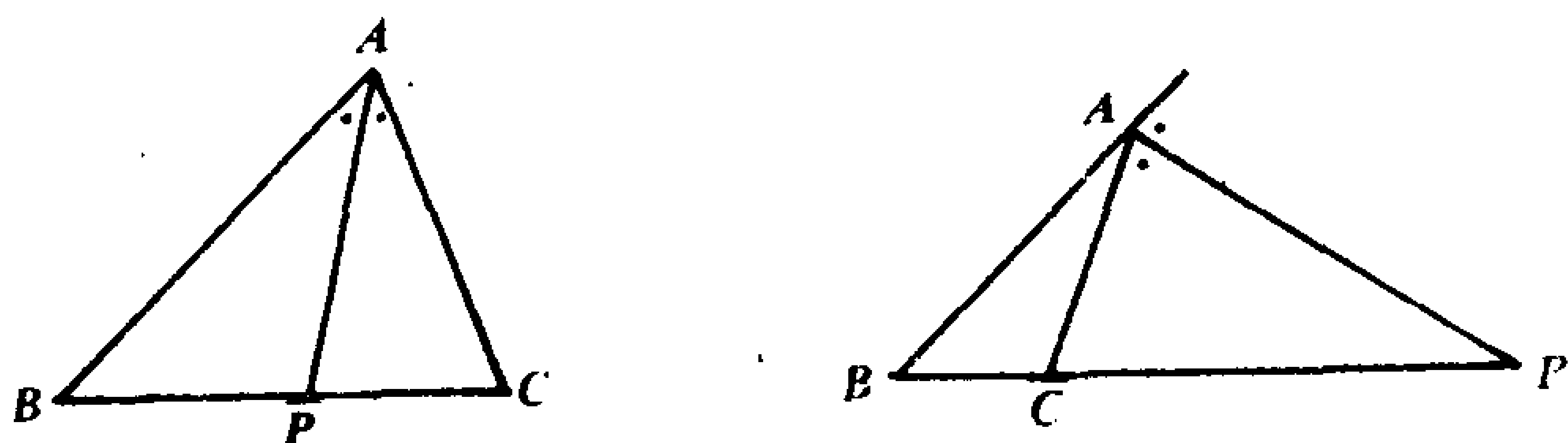


图 8-1

上述定理的发现者没有留下姓名,但它确是平几中最重要最基本的定理之一.这一定理对证明下面的阿波罗尼斯(Apollonius,约公元前260～前190年)定理是必须用到的,这一事实说明上述定理的发现至少可上推到公元前200年以前.

阿波罗尼斯定理　到两定点A、B的距离之比为定值$\frac{m}{n}(\neq 1)$的点P,位于以把线段AB分成$\frac{m}{n}$的内分点C和外分点D为直径两端的定圆周上(图8-2).

与角平分线定理等价的有所谓

斯库顿定理　在$\triangle ABC$中(图8-3),AP为$\angle BAC$的平分线,则

$$PA^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC.$$

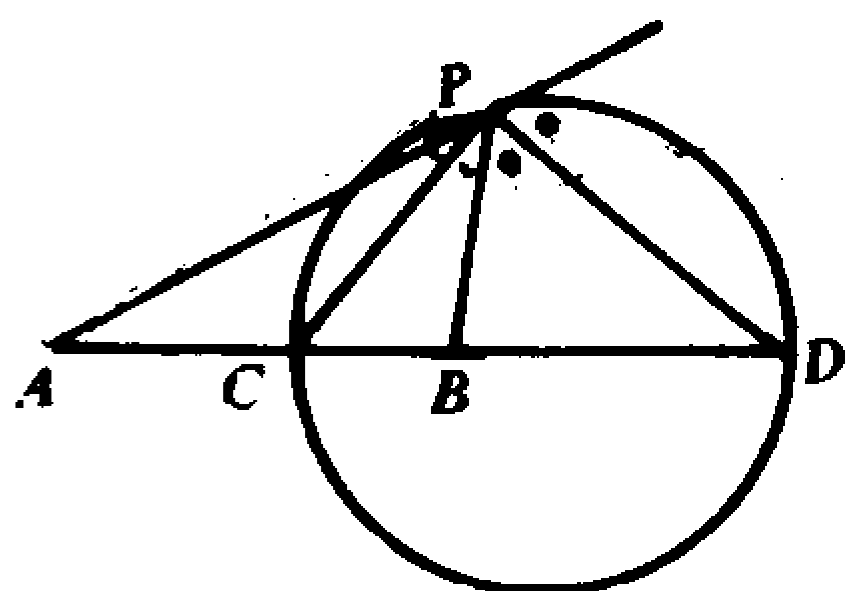


图 8-2

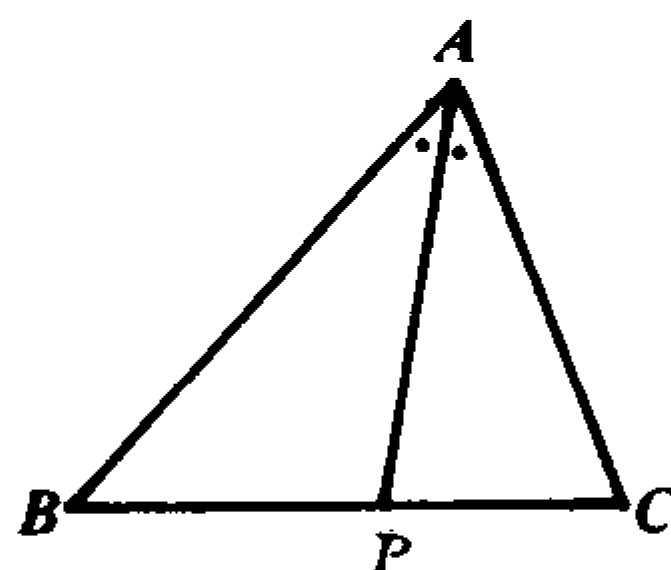


图 8-3

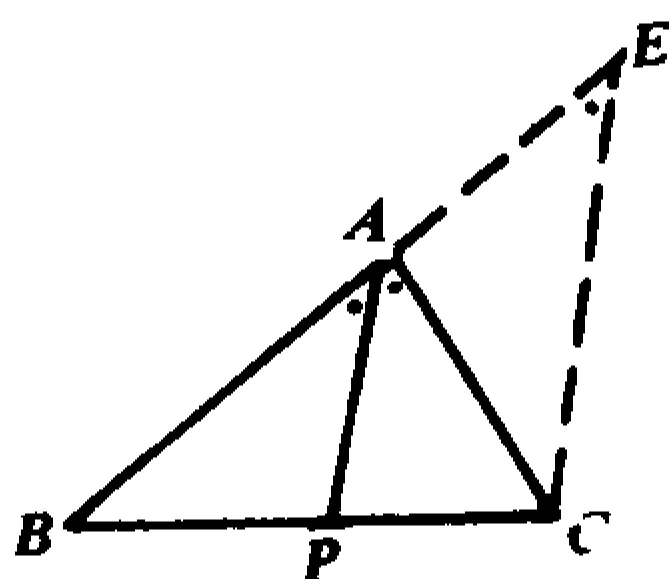
斯库顿(Schooten,1615 ~ 1660 年)是荷兰数学家,上述以他的名字命名的定理也是平面几何学中最著名的定理之一,它在解题中有着广泛的应用.

§8.2　定理的证明

首先,我们证明角平分线定理.

证明　如图8-4,作$CE \parallel AP$交BA(或延长线)于E,则$AC = AE$,故有

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE} = \frac{BP}{CP}.$$



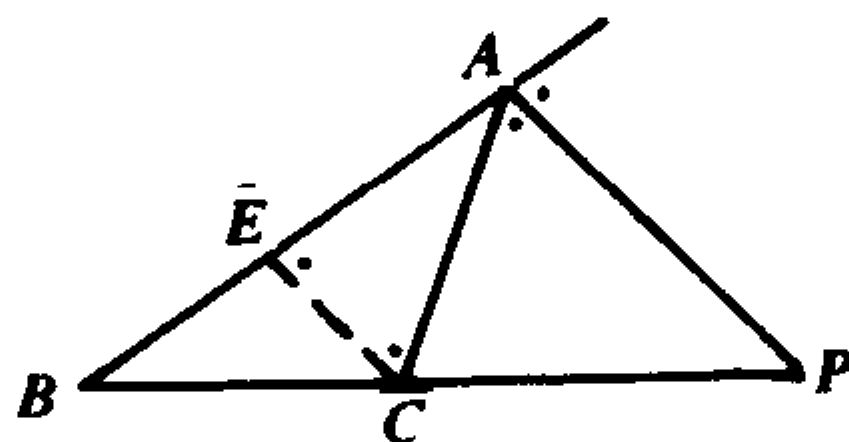


图 8-4

证明是简单的,且还有三角的、面积的、解析的各种证法

十多种，有兴趣的读者可自己证明.

其次，我们证明阿波罗尼斯定理.

证明 如图 8-2，设 $\angle APB$ 的内角平分线和外角平分线分别与 AB 或其延长线交于 C、D，则有 $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}=\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ 为定值，从而 C、D 为定点，又 $\angle CPD=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，故点 P 在以 CD 为直径的圆周上.

再次，我们来给出斯库顿定理的几种证明.

证法 1 如图 8-5 延长 AP 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E，连 BE，由 $\angle BAE=\angle PAC$，$\angle E=\angle C$，得 $\triangle ABE\backsim\triangle APC\Rightarrow \frac{AB}{AP}=\frac{AE}{AC}$. 于是

$AB\cdot AC=AP\cdot AE=AP(AP+PE)=AP^2+AP\cdot PE$.

由相交弦定理有 $AP\cdot PE=BP\cdot PC$，代入上式即得

$AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$.

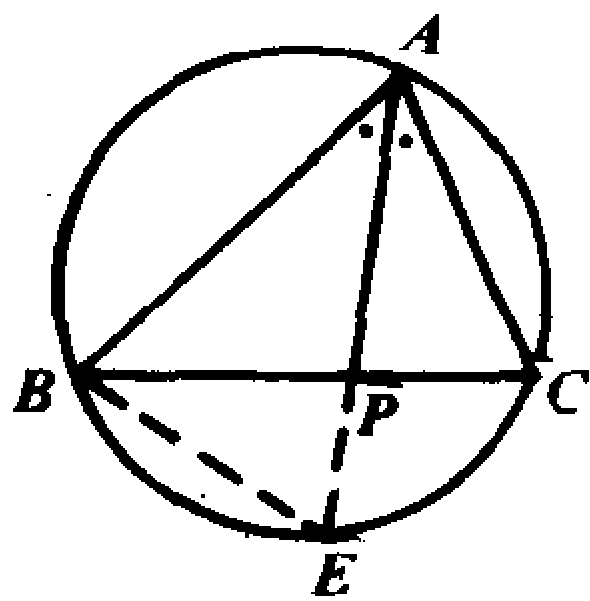


图 8-5

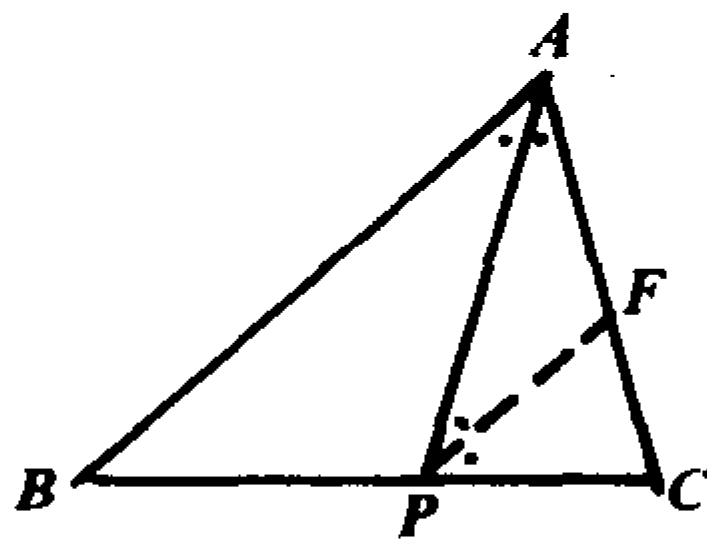


图 8-6

证法 2 如图 8-6，作 $\angle APF=\angle ABP$，则

$\triangle ABP\backsim\triangle APF$

$\Rightarrow\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{AF}\Rightarrow AP^2=AB\cdot AF$

$$\Rightarrow AP^2 = AB(AC - FC) = AB \cdot AC - AB \cdot FC \quad ①$$

因为 $\angle C = \angle C, \angle PFC = \angle PAF + \angle FPA$
$= \angle PAB + \angle ABP = \angle APC$,

所以 $\triangle FPC \backsim \triangle PAC$.

所以 $$\frac{FC}{PC} = \frac{PC}{AC} \Rightarrow FC = \frac{PC^2}{AC} \quad ②$$

又因为 $$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot BP}{PC} \quad ③$$

②与③相乘,代入①便得 $AP^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$.

证法3 如图8-7,延长AP交$\triangle ABC$的外接圆于M,则$MB = MC$,由托勒密定理得$AM \cdot BC = AC \cdot BM + AB \cdot MC$,

即 $$(AP + PM)BC = MC(AB + AC) \quad ④$$

由$\triangle PCM \backsim \triangle APB$得

$$PM = \frac{PB \cdot CP}{AP} \quad ⑤$$

$$MC = \frac{AB \cdot CP}{AP} \quad ⑥$$

将⑤、⑥代入④得

$$\left(AP + \frac{PB \cdot PC}{AP}\right) \cdot BC = \frac{AB \cdot PC}{AP}(AB + AC)$$

即 $$AP^2 + PB \cdot PC = \frac{AB}{\frac{BC}{PC}}(AB + AC)$$

$$= \frac{AB}{\frac{PC + PB}{PC}}(AB + AC)$$

$$= \frac{AB}{\left(1 + \frac{AB}{AC}\right)}(AB + AC) = AB \cdot AC,$$

故 $AP^2 = AB \cdot AC - PB \cdot PC$.

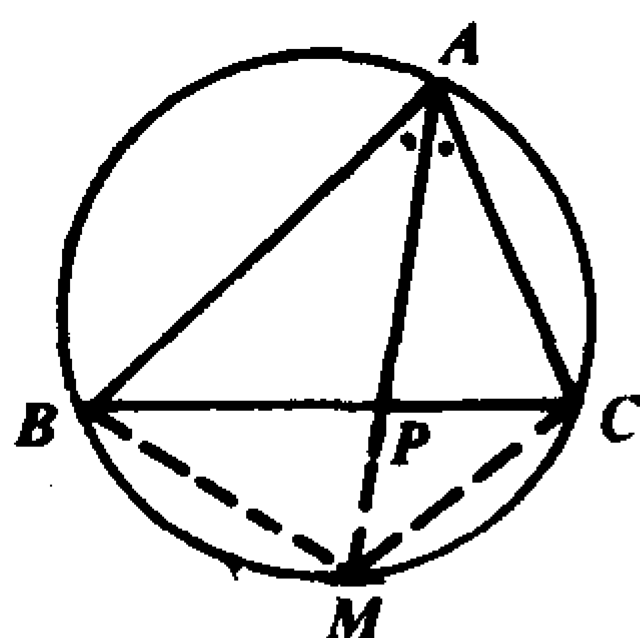


图 8-7

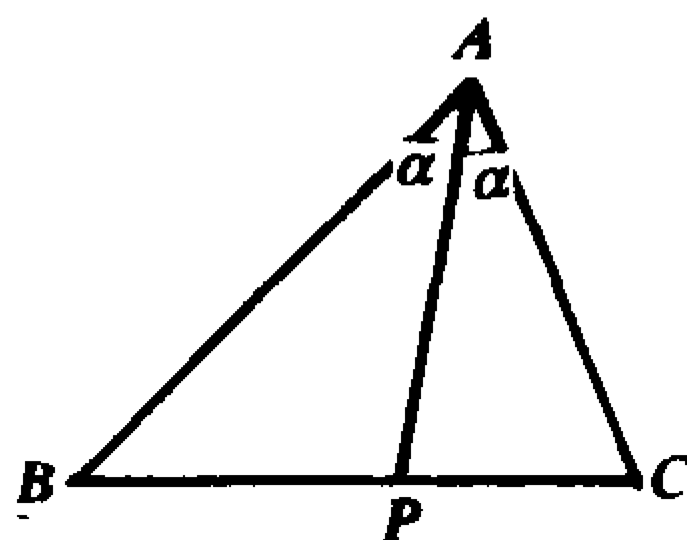


图 8-8

证法 4 如图 8-8 所设，由余弦定理有

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + PA^2 - PB^2}{2AB \cdot PA}, \cos\alpha = \frac{AC^2 + PA^2 - PC^2}{2AC \cdot PA}$$

故有 $$\frac{AB^2 + PA^2 - PB^2}{2AB \cdot PA} = \frac{AC^2 + PA^2 - PC^2}{2AC \cdot PA}.$$

$$AC \cdot AB^2 + AC \cdot PA^2 - AC \cdot PB^2 = AB \cdot AC^2 + AB \cdot PA^2 - AB \cdot PC^2,$$

$$(AC - AB)PA^2 = AB \cdot AC(AC - AB) + AC \cdot PB^2 - AB \cdot PC^2$$

因为 $$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow AB \cdot PC = BP \cdot AC$$

所以 $$AC \cdot PB^2 - AB \cdot PC^2 = PB \cdot AB \cdot PC - AC \cdot PB \cdot PC = -(AC - AB)PB \cdot PC.$$

所以 $$(AC - AB)PA^2 = (AC - AB)AB \cdot AC - (AC - AB)PB \cdot PC.$$

有 $$PA^2 = AB \cdot AC - PB \cdot PC.$$

与角平分线定理一样，斯库顿定理也还有其它平面几何的、三角的、解析的多种证法，限于篇幅，我们不作一一介绍.

最后我们指出，角平分线定理和斯库顿定理的逆命题均是成立的.

角平分线定理的逆定理　若 P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的内分(或外分)点,且 $\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP}$,则 AP 平分 $\angle BAC$ 的内角(或外角).

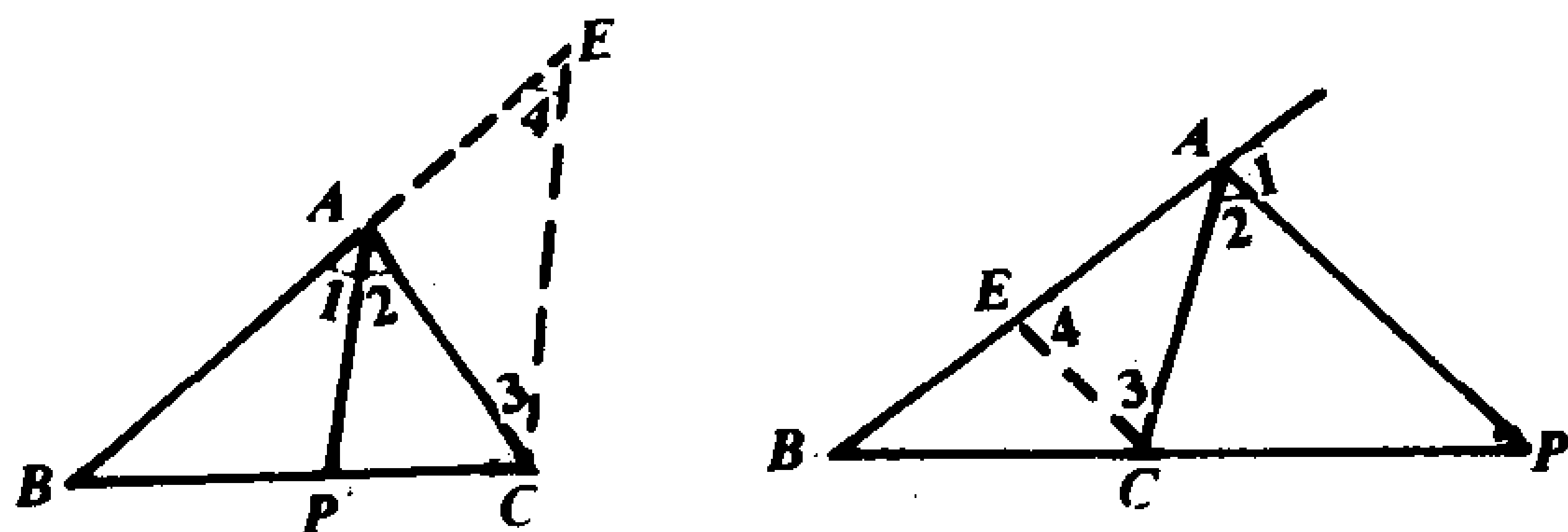


图 8-9

证明　如图 8-9,作 $CE \parallel AP$,交 BA(或延长线)于 E,则 $\angle 1=\angle 4$, $\angle 2=\angle 3$, $\frac{BP}{CP}=\frac{BA}{EA}$,

又 $\frac{BP}{CP}=\frac{AB}{AC}$,　所以 $AC=AE$,

从而 $\angle 3=\angle 4$,得 $\angle 1=\angle 2$,故 AP 平分 $\angle BAC$ 的内角(或外角).

斯库顿定理的逆定理　若 P 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点,且 $AB\neq AC$, $PA^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$,则 AP 平分 $\angle A$.

证明　如图 8-10,由余弦定理有

$$AB^2=PA^2+BP^2+2PA\cdot PB\cdot\cos\alpha \quad ⑦$$

$$AC^2=PA^2+PC^2-2PA\cdot PC\cdot\cos\alpha \quad ⑧$$

⑦ $\times PC+$ ⑧ $\times PB$ 得

$$PC\cdot AB^2+PB\cdot AC^2$$
$$=PC(PA^2+PB^2)$$
$$+PB(PA^2+PC^2)$$
$$=BC\cdot PA^2+BC\cdot PB\cdot PC.$$

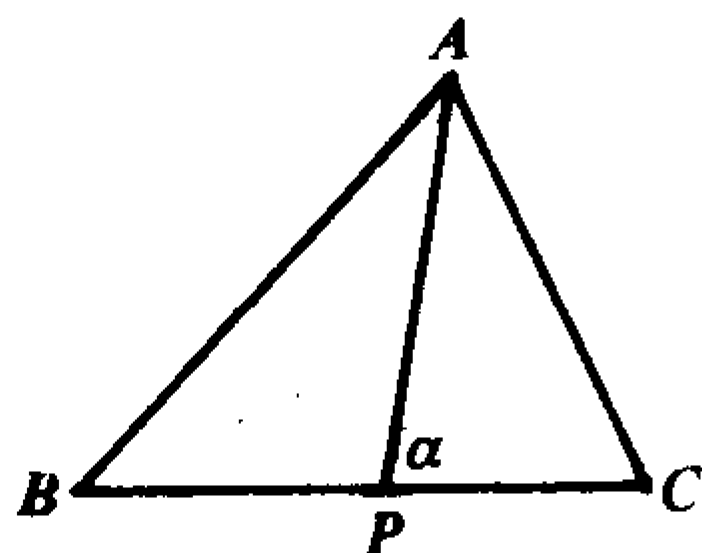


图 8-10

因为　$PA^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC$,

所以 $PC \cdot AB^2 + PB \cdot AC^2$

$$= BC(AB \cdot AC - BP \cdot PC) + BC \cdot PB \cdot PC$$
$$= BC \cdot AB \cdot AC$$
$$= (PB + PC) \cdot AB \cdot AC$$
$$= PB \cdot AB \cdot AC + PC \cdot AB \cdot AC.$$

所以 $PB \cdot AC(AC - AB) = PC \cdot AB(AC - AB)$.

因为 $AC - AB \neq 0$,

所以 $PB \cdot AC = PC \cdot AB \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{PB}{PC}$.

由角平分线定理的逆定理知,PA 平分 $\angle BAC$.

从上面的证明我们看到,由 $PA^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$ 可推出 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{PB}{PC}$;反之由 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{PB}{PC}$ 也可推出 $PA^2 = AB \cdot AC - BP \cdot PC$(因上面推导可逆). 这说明,角平分线定理与斯库顿定理实质上是等价的. 特别地,对外角平分线,斯库顿定理结论为:"$PA^2 = BP \cdot PC - AB \cdot AC$". 这一点读者可自己推证.

§8.3 定理的引伸与推广

1. 将分角线向一般直线推广

定理 8.1 设 P 为 $\triangle ABC$ 底边 BC 上任意一点(C 点除外),则

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB\sin\angle BAP}{AC\sin\angle PAC}.$$

证明 如图 8-11 有

$$\frac{BP}{CP} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APC}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AP\sin\angle BAP}{\frac{1}{2}AC \cdot AP\sin\angle PAC} = \frac{AB\sin\angle BAP}{AC\sin\angle PAC}.$$

显然,角平分线定理是其特例.

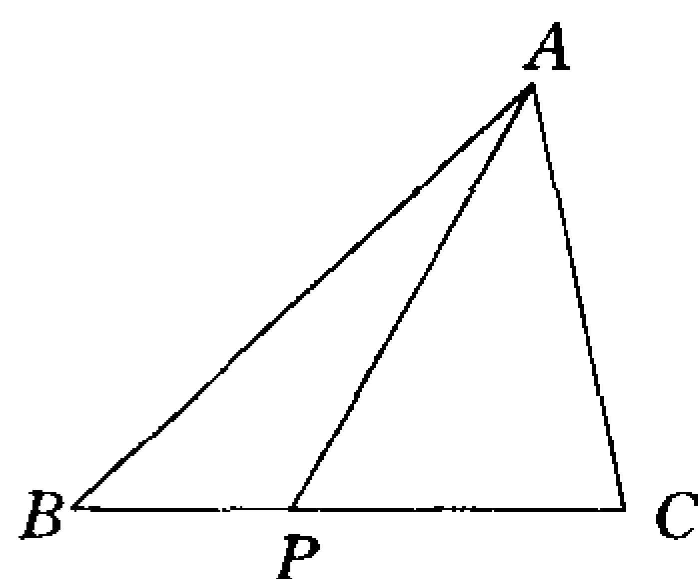
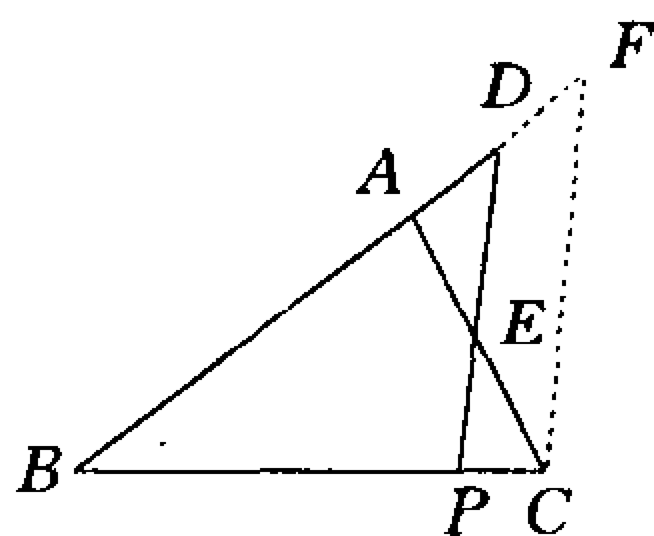


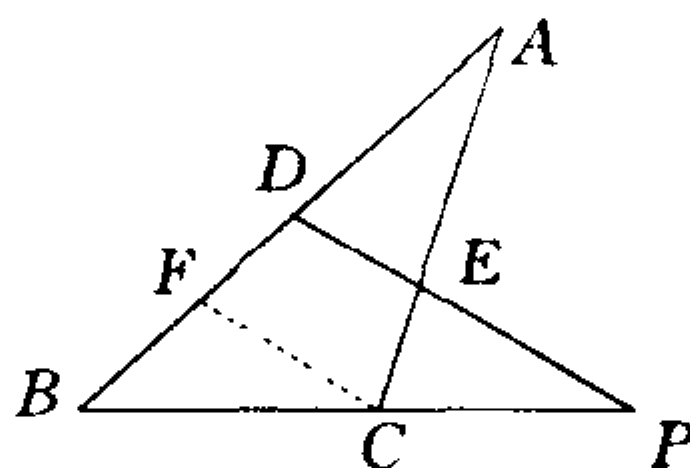
图 8-11

定理 8.2 若直线 DP 交 $\triangle ABC$ 三边(或其延长线) 分别于 D、E、P,且 $\angle BDP = \angle CEP$,则 $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{BD}{CE}$.

证明 如图 8-12(a),过 C 作 $CF \parallel PD$ 交 BA(或其延长线) 于 F,



(a)



(b)

图 8-12

因为 $\angle BDP = \angle CEP$ 故 $AD = AE$ 则 $EC = DF$,

所以 $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{BD}{DF} = \dfrac{BD}{EC}$.

特别地,当 DP 过点 A 时为内角平分线定理. 外角情形(当 $\angle ADP = \angle CEP$ 时,图 8-12(b) 可对应写出.

2. 把内角平分线定理中的两个三角形裁开,且其中一个作相似变形.

定理 8.3 若两个三角形中,有一对角相等,一对角互补,则夹第三角的两边对应成比例.

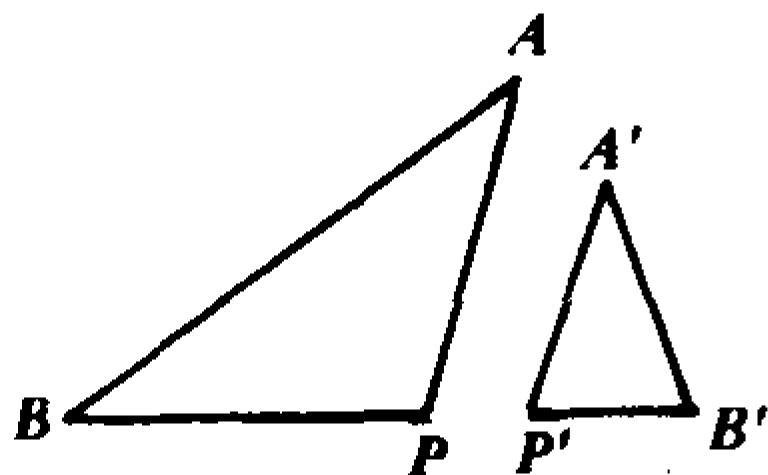


图 8-13

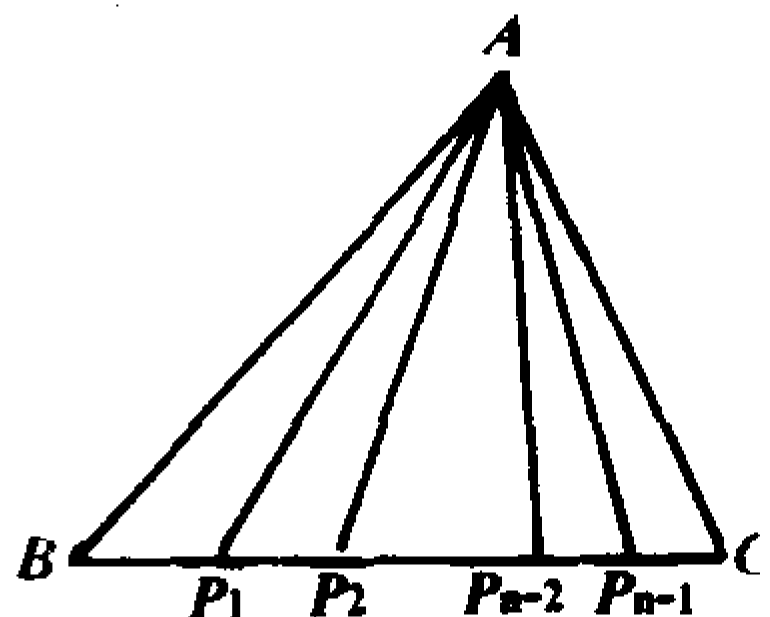


图 8-14

如图8-13，在$\triangle ABP$和$\triangle A'P'C$中，$\angle A=\angle A'$，$\angle P+\angle P'=180^\circ$，则$\frac{AB}{BP}=\frac{A'C}{P'C}$.

3. 将底边上的一点P进行推广

定理8.4　若P_1、P_2、…、P_{n-1}为$\triangle ABC$的BC边上的点(图8-14)，且$\angle P_1AB=\angle P_{n-1}AC$，$\angle P_2AB=\angle P_{n-2}AC$，…，$\angle P_{n-1}AB=\angle P_1AC$，则

$$\frac{AB^{n-1}}{AC^{n-1}}=\frac{BP_1\cdot BP_2\cdots BP_{n-1}}{CP_1\cdot CP_2\cdots CP_{n-1}}.$$

证明　因为
$$\frac{BP_1}{CP_{n-1}}=\frac{S_{\triangle ABP_1}}{S_{\triangle ACP_{n-1}}}=\frac{AB\cdot AP_1}{AC\cdot AP_{n-1}},$$
$$\frac{BP_2}{CP_{n-2}}=\frac{S_{\triangle ABP_2}}{S_{\triangle ACP_{n-2}}}=\frac{AB\cdot AP_2}{AC\cdot AP_{n-2}},$$
……，
$$\frac{BP_{n-1}}{CP_1}=\frac{S_{\triangle ABP_{n-1}}}{S_{\triangle ACP_1}}=\frac{AB\cdot AP_{n-1}}{AC\cdot AP_1},$$

诸式相乘，得

$$\frac{AB^{n-1}}{AC^{n-1}}=\frac{BP_1\cdot BP_2\cdots BP_{n-1}}{CP_1\cdot CP_2\cdots CP_{n-1}}.$$

定理8.5　若P_1、P_2、…、P_{n-1}为BC延长线上的点，且

$\angle CAP_1+\angle BAP_{n-1}=180^\circ$，

$\angle CAP_2+\angle BAP_{n-2}=180$，……

$\angle CAP_{n-1}+\angle BAP_1=180^\circ$，

则　$$\frac{AB^{n-1}}{AC^{n-1}}=\frac{BP_1\cdot BP_2\cdots BP_{n-1}}{CP_1\cdot CP_2\cdots CP_{n-1}}.$$

证明仿定理8.4，略.

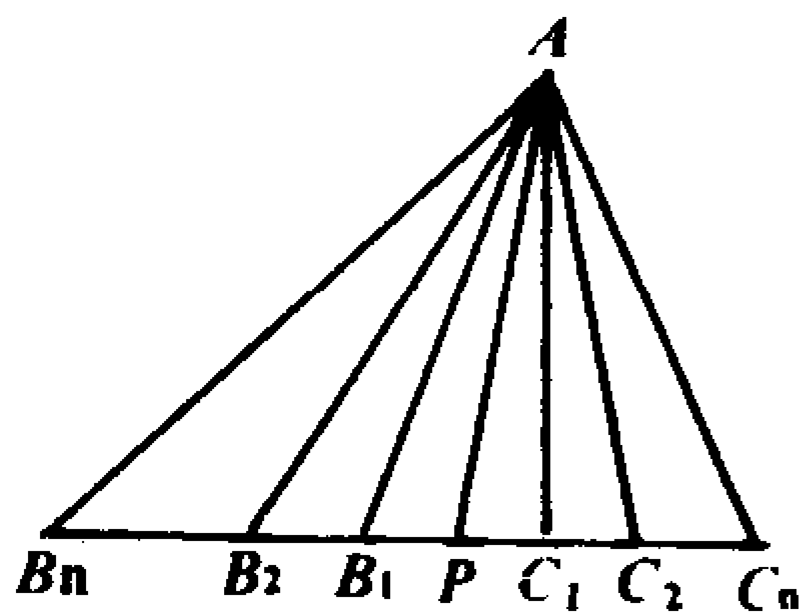


图8-15

定理8.6　如果AP为$\triangle AB_iC_i$的$\angle B_iAC_i$的公共平分线，且B_i、$C_i(i=1,2,\cdots,n)$共线，则

$$\left(\frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdots AB_n}{AC_1 \cdot AC_2 \cdots AC_n}\right)^2 = \frac{PB_1 \cdot B_1B_2 \cdot B_2B_3 \cdots B_{n-1}B_n \cdot B_nP}{PC_1 \cdot C_1C_2 \cdot C_2C_3 \cdots C_{n-1}C_n \cdot C_nP}.$$

证明 如图 8-15，易知

$\angle B_iAB_{i-1} = \angle C_iAC_{i-1}$，依面积公式知

$$\frac{B_{i-1}B_i}{C_{i-1}C_i} = \frac{AB_{i-1} \cdot AB_i}{AC_{i-1} \cdot AC_i},$$

从而 $$\frac{PB_1 \cdot B_1B_2 \cdot B_2B_3 \cdots B_{n-1}B_n \cdot B_nP}{PC_1 \cdot C_1C_2 \cdot C_2C_3 \cdots C_{n-1}C_n \cdot C_nP}$$

$$= \frac{AB_1 \cdot AB_1 \cdot AB_2}{AC_1 \cdot AC_1 \cdot AC_2} \cdot \frac{AB_2 \cdot AB_3}{AC_2 \cdot AC_3} \cdots \frac{AB_{n-1} \cdot AB_n}{AC_{n-1} \cdot AC_n} \cdot \frac{AB_n \cdot AP}{AC_n \cdot AP}$$

$$= \left(\frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdots AB_n}{AC_1 \cdot AC_2 \cdots AC_n}\right)^2.$$

4. 向空间推广

定理 8.7 四面体的二面角内(外)平分平面分对棱所得两条线段与这个二面角的两个面的面积对应成比例.

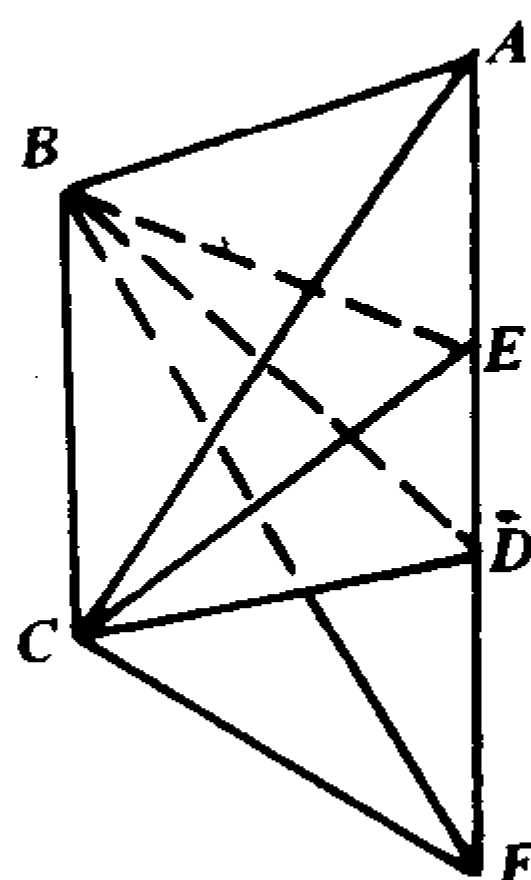


图 8-16

证明 如图 8-16，平面 BCE 和 BCF 分别是四面体 $A\text{-}BCD$ 的二面角 $A\text{-}BC\text{-}D$ 的内、外平分平面，设 AD 与平面 BCE 的夹角为 α，则四面体 $A\text{-}BCE$ 与 $D\text{-}BCE$ 体积之比

$$\frac{V_{A\text{-}BCE}}{V_{D\text{-}BCE}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\triangle BCE} \cdot AE\sin\alpha}{\frac{1}{3}S_{\triangle BCE} \cdot DE\sin\alpha} = \frac{AE}{DE},$$

又依题设知，E 到平面 ABC 及 BCD 等距离.

所以 $$\frac{V_{A\text{-}BCE}}{V_{D\text{-}BCE}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}$$

故 $AE : DE = S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BCD}$.

同理可证 $AF : DF = S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BCD}$.

§ 8.4　定理的应用

例 8.1　已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=5$，$BC=4$，AD，AD' 分别为内外角平分线，求 DD' 之长.

解　如图 8-17，设 $DC=x$，$CD'=y$，则由角平分线定理有

$$\frac{4-x}{x}=\frac{6}{5},\ \frac{4+y}{y}=\frac{6}{5}.$$

解之得　$x=\frac{20}{11}$，$y=20$，

所以 $DD'=x+y=\frac{20}{11}+20=21\frac{9}{11}$.

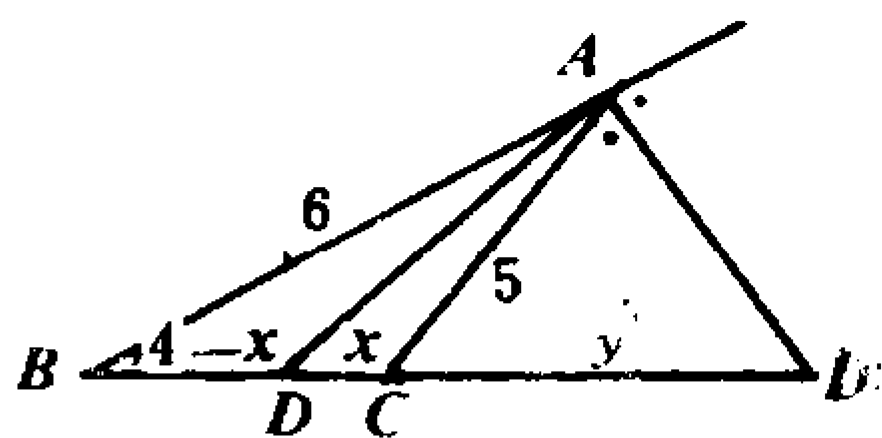


图 8-17

例 8.2　已知在 $\triangle ABC$ 中，AD、BE、CF 是高，H 是垂心，AD 与 EF 相交于 G 点，求证：

$$\frac{GH}{HD}=\frac{GA}{AD}.$$

证明　如图 8-18，连 DE，由 H、D、C、E 共圆，得 $\angle 1=\angle 5$，由 E、F、B、C 共圆得 $\angle 2=\angle 5$.

所以　$\angle 1=\angle 2$，从而 $\angle 3=\angle 6=\angle 4$.

由角平分线定理有

$$\left.\begin{aligned}\frac{GH}{HD}=\frac{EG}{ED}\\ \frac{GA}{AD}=\frac{EG}{ED}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{GH}{HD}=\frac{GA}{AD}.$$

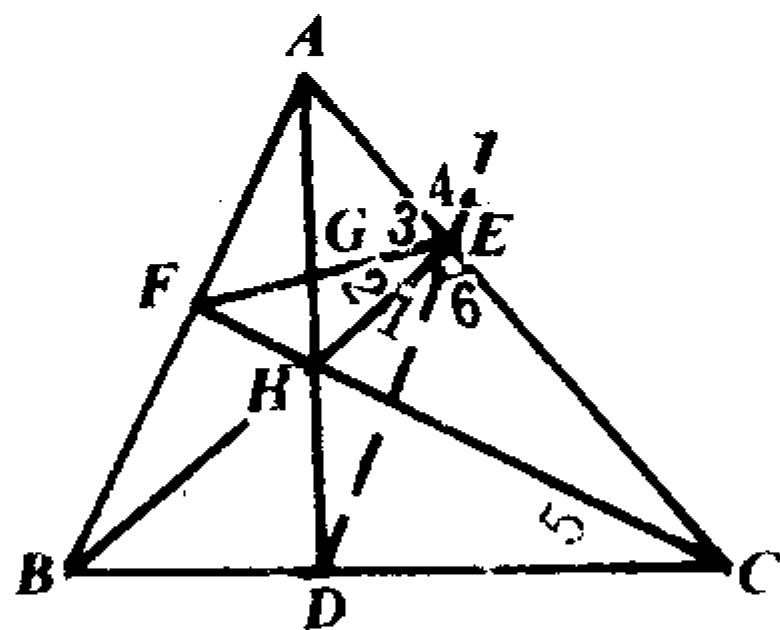


图 8-18

例 8.3　已知四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 BC、AD 的中点，EF 延长后分别与 BA、CD 的延长线交于 S、K，且 $\angle S=K$，求证：$AB=CD$.

证明 如图 8-19,在 $\triangle SBE$ 和 $\triangle KEC$ 中,
因为 $\angle S = \angle K, \angle SEB + \angle KEC = 180°$,

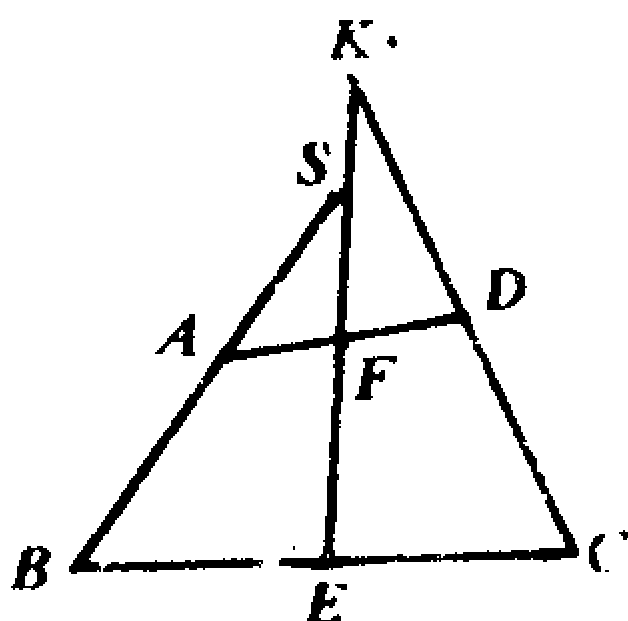


图 8-19

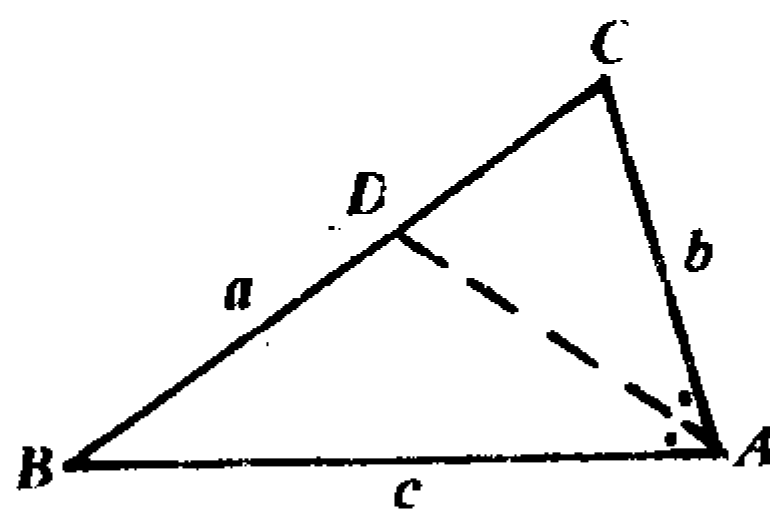


图 8-20

由定理 8.3 有 $\dfrac{BS}{BE} = \dfrac{KC}{EC}$.

因为 $BE = EC$, 所以 $BS = KC$ ①

同理在 $\triangle SAF$ 和 $\triangle KFD$ 中,用定理 8.3 得

$SA = KD$ ②

① − ② 得 $AB = CD$.

例 8.4 $\triangle ABC$ 三边分别为 a、b、c,若 $\angle A = 2\angle B$,则 $a^2 = b(b+c)$.

证明 如图 8-20,作 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D,依角平分线定理有

$$\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{CD}{CD+BD} = \frac{b}{c+b} \Rightarrow CD = \frac{ab}{b+c}.$$

又 $\angle CAD = \angle B = \dfrac{1}{2}\angle A$

所以 $\triangle CBA \backsim \triangle CAD \Rightarrow \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA}$

$$\Rightarrow CA^2 = CB \cdot CD$$

即 $b^2 = a \cdot \dfrac{ab}{b+c}$, 所以 $a^2 = b(b+c)$.

例 8.5 在 $\triangle ABC$ 中,求证:$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$.

证明 如图 8-21,AD、BE、CF 分别为角 A、B、C 的平分线,三边记为 a、b、c. 在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理有

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{c}{\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)}.$$

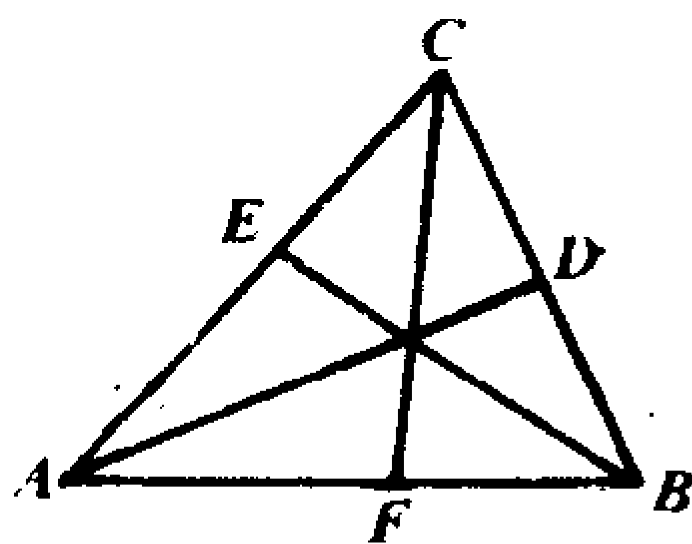


图 8-21

又由角平分线定理

$$\frac{BD}{CD}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BD}{CD+BD}=\frac{c}{b+c}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c},$$

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{BD}{c}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)=\frac{a}{b+c}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}+C\right).$

同理可得 $\sin\frac{B}{2}=\frac{b}{c+a}\cdot\sin\left(\frac{B}{2}+A\right),$

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{c}{a+b}\cdot\sin\left(\frac{C}{2}+B\right).$$

所以 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{abc}{(a+c)(c+b)(a+b)}\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)\sin\left(\frac{B}{2}+A\right)\cdot\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)$$

$$\leqslant\frac{abc}{2\sqrt{bc}\cdot2\sqrt{ac}\cdot2\sqrt{ab}}\cdot1=\frac{1}{8}.$$

等号当 $a=b=c$ 时成立.

例 8.6 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2BC$，$\angle B=2\angle A$，求证：$\triangle ABC$ 为直角三角形.

证明 如图 8-22，作 $\angle B$ 的平分线交 AC 于 D，则

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}=2.$$

令 $BC=a$，$CD=x$，则 $AB=2a$，$AD=2x=BD$. 由斯库顿定理有 $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$，

即 $(2x)^2=2a^2-2x^2$，　　$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

所以 $AC=\sqrt{3}a$，有 $AB^2=AC^2+BC^2$，

故　$\triangle ABC$ 为直角三角形.

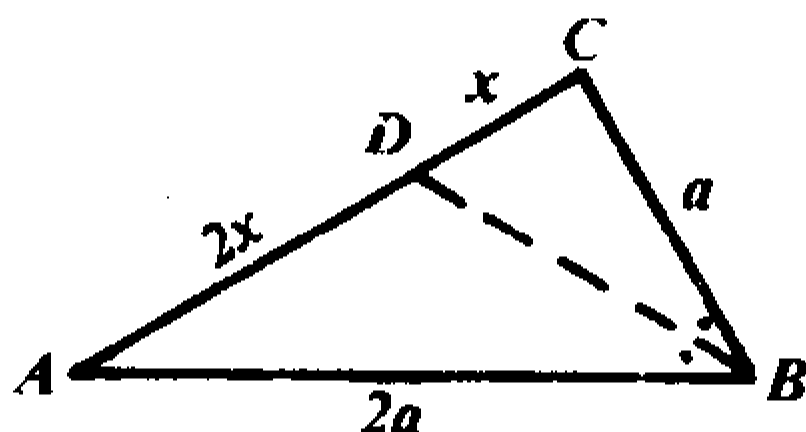


图 8-22

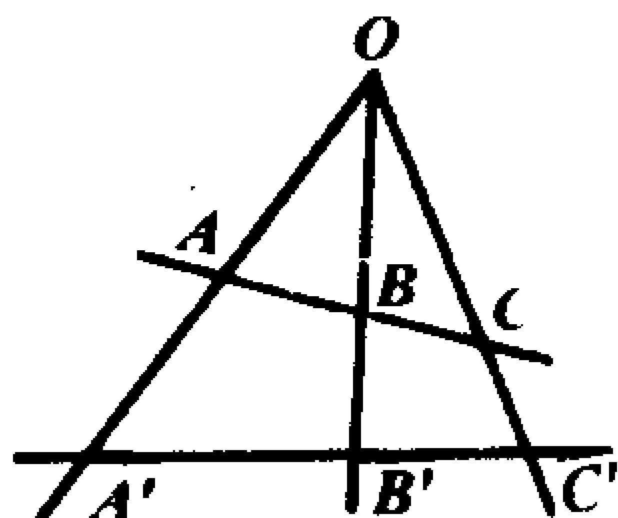


图 8-23

例 8.7　如图 8-23，过 O 点的三条直线被另两条直线所截，交点分别为 A、B、C 及 A'、B'、C'，则

$$\frac{AB}{AC} : \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{OB}{OC} : \frac{OB'}{OC'}.$$

证明　依定理 8.1，有

$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB\sin\angle AOB}{OC\sin\angle AOC}, \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{OB'\sin\angle A'OB'}{OC'\sin\angle A'OC'}.$$

因为　$\angle AOB = \angle A'OB'$，$\angle AOC = \angle A'OC'$.

故欲证式成立.

练习与思考

1. 在边长为 3、4、5 的直角三角形中，求直角的内角平分线的长度.

2. 若 $\triangle ABC$ 的三边长为连续整数，且最大角 $\angle B$ 等于最小角 $\angle A$ 的两倍，求三边的长度.

3. D 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点，设 $AC + CD = m$，$AB - BD = n(n > 0)$. 求 $\angle A$ 的平分线的长.　　$(\sqrt{mn})$

第九章　阿波罗尼斯定理

§9.1　定　　理

阿波罗尼斯定理　三角形两边平方的和，等于所夹中线及第三边之半的平方和的两倍.

阿波罗尼斯(Apollonius，约公元前262～前190年)是著名的希腊数学家，当时以“大几何学家”闻名. 他与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大学派前期三大数学家. 他在传统的欧几里得几何基础上，编著了《圆锥曲线论》(Conic Sections)，这部著作分8篇共487个命题，有一些比欧几里得几何更为精深的成就，并透露出“解析几何”思想. 尤其是他的圆锥曲线理论. 论述详尽，历经1500年，后人几乎无所增补. 正如克莱因(Klein)教授所说：“按成就来说，它是这样一个巍然屹立的丰碑，以致后代学者至少从几何上几乎不能再对这个问题有新的发言权，它确实可以看成是古典希腊几何的登峰造极之作.”

上述的阿波罗尼斯定理在现行教材中的表述为：“平行四边形的两条对角线的平方和等于其各边的平方和”(见定理1.5).

关于这一定理，也有书称帕普斯(Pappus)定理.

§9.2　定理的证明

如图9-1所设，E 为 AB 的中点，$\angle CEA = \alpha$，则由余弦定

理有

$$AC^2 = EC^2 + AE^2 - 2EC \cdot AE\cos\alpha \quad ①$$

$$BC^2 = EC^2 + EB^2 + 2EC \cdot EB\cos\alpha \quad ②$$

因为 $AE = BE$

所以 ①+②得

$$AC^2 + BC^2 = 2(EC^2 + AE^2)$$

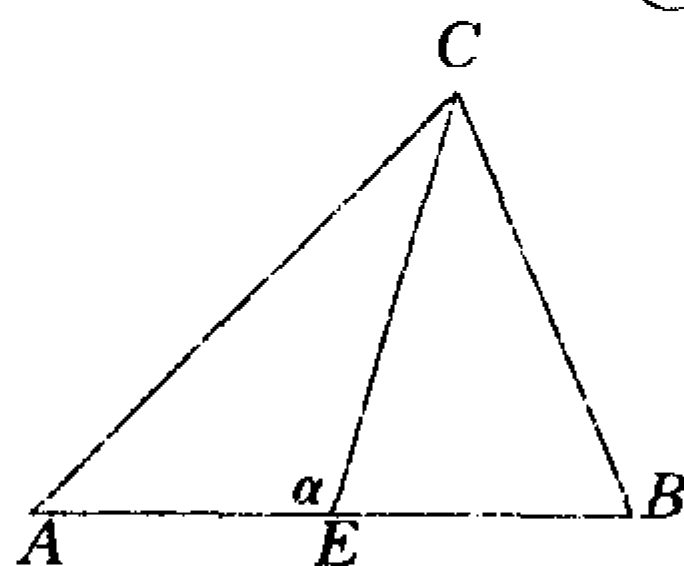


图 9-1

§9.3 引伸与推广

1. 把中点 E 向任意点推广

定理 9.1 设 E 为 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的点，则

$$AC^2 \cdot EB + BC^2 \cdot AE = CE^2 \cdot AB + AE \cdot EB \cdot AB.$$

证明 如图 9-2，因为

$$AC^2 = EC^2 + AE^2 - 2EC \cdot AE\cos\alpha \quad ③$$

$$BC^2 = CE^2 + EB^2 + 2EC \cdot EB\cos\alpha \quad ④$$

③×EB+④×AE 得

$$AC^2 \cdot EB + BC^2 \cdot AE = EC^2(AE + EB) + AE \cdot EB(AE + EB)$$

$$= EC^2 \cdot AB + AE \cdot EB \cdot AB.$$

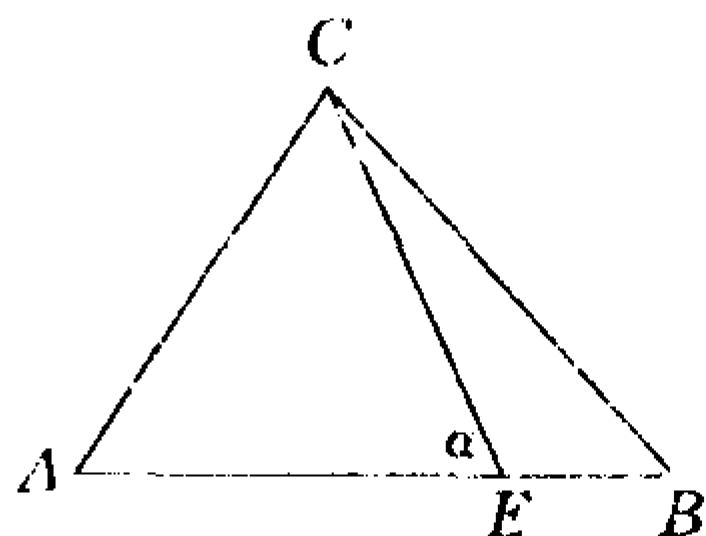


图 9-2

显然，当 $AE = EB$ 时即为阿波罗尼斯定理. 读者还可验证，定理 9.1 当 A、B、C 共线时，结论也成立.

定理 9.1 称为斯蒂瓦特定理，斯蒂瓦特(Stewart，1717～1785 年) 是英国(英格兰) 哲学家，爱丁堡大学数学教授，上述定理是他 1746 年叙述的，据说这一定理在公元前 300 年左右阿基米德就发现了，但第一个已知的证明是西姆松(见

第二十二章）在 1751 年发表的.

2. 把三角形向四边形推广

定理9.2 若 E、F 为四边形 $ABCD$ 的 AB、CD 边上的点，且 $\frac{AE}{EB}=\frac{DF}{FC}=\frac{m}{n}$，$AD=b$，$BC=a$，设 AD 与 BC 的夹角为 α，则

$$(m+n)^2EF^2=(am)^2+(bn)^2+2am\cdot bn\cdot\cos\alpha.\quad(\text{Ⅰ})$$

证明 如图 9-3，连 BD，过 E 作 $EO\parallel AD$，交 BD 于 O，连 OF，则 $OF\parallel BC$，且有

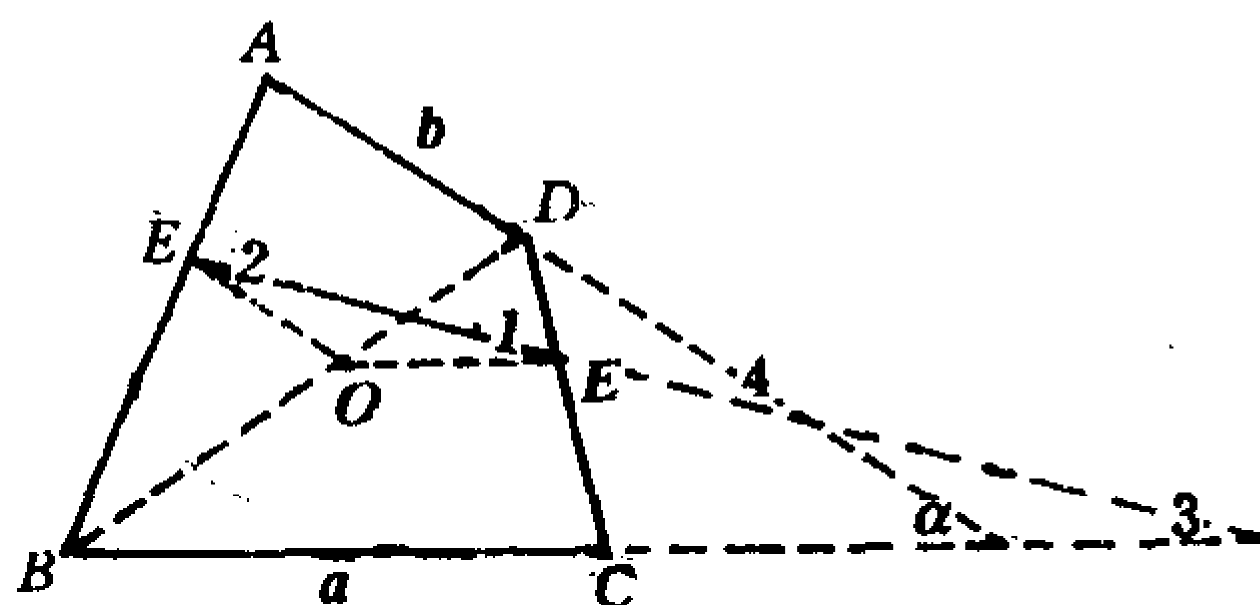


图 9-3

$$\angle1=\angle3,\quad \angle2=\angle4$$

所以 $\angle1+\angle2=\angle3+\angle4=\alpha$,

又因为 $OE=\frac{bn}{m+n}$，$OF=\frac{am}{m+n}$，

在 $\triangle EOF$ 中，依余弦定理，有

$$EF^2=\left(\frac{bn}{m+n}\right)^2+\left(\frac{am}{m+n}\right)^2-2\cdot\frac{bn}{m+n}\cdot\frac{am}{m+n}\cos(180^\circ-\alpha)$$

即 $(m+n)^2EF^2=(am)^2+(bn)^2+2am\cdot bn\cos\alpha$

定理 9.2 得证，下面看看它的各种特例：

1) 在（Ⅰ）中，令 $EF=l.\ \frac{m}{n}=1$，解出 l 得

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} \qquad (\text{Ⅱ})$$

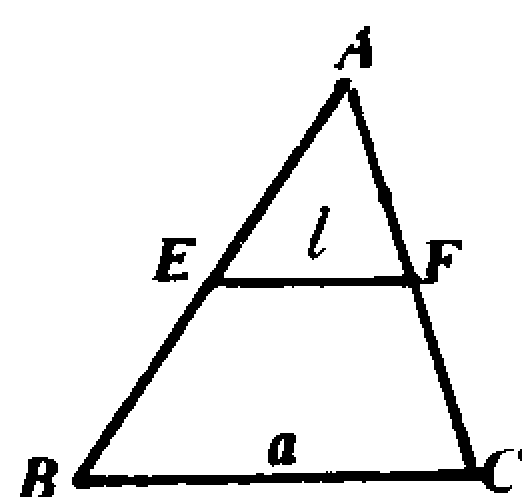
为任意四边形对边中点连线长公式.

2)　在(Ⅱ)式中

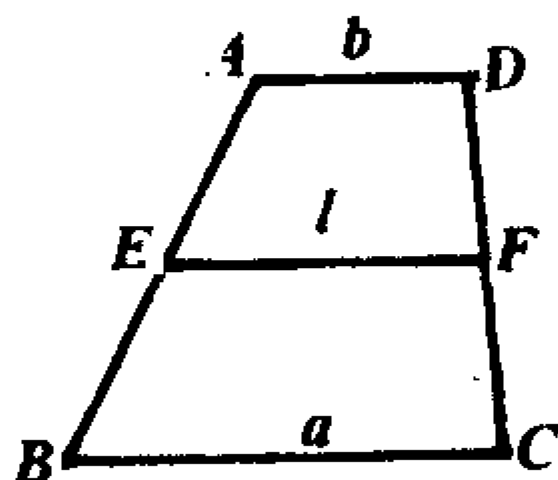
令 $b = 0$,得 $l = \frac{a}{2}$,为三角形中位线定理,如图 9-4(a);

令 $\alpha = 0$,得 $l = \frac{a+b}{2}$,为梯形中位线定理,如图 9-4(b);

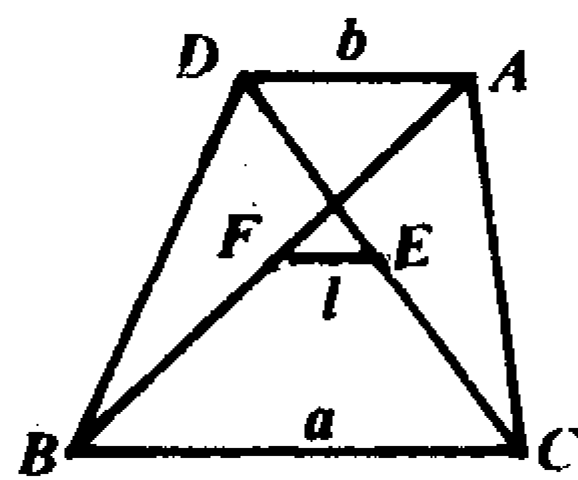
令 $\alpha = 180°$,得 $l = \frac{a-b}{2}$,为梯形两对角线中点连线长公式,如图 9-4(c)



(a)



(b)



(c)

图 9-4

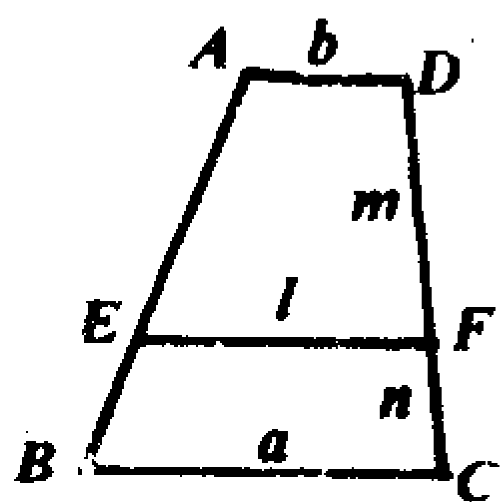
3)　在(Ⅰ)式中,

令 $\alpha = 0$,得 $l = \frac{am + bn}{m + n}$,为分梯形两腰为$\frac{m}{n}$的线段长公式,如图 9-5(a);

令 $\alpha = 180°$,得 $l = \frac{am - bn}{m + n}$,为分梯形两对角线为$\frac{m}{n}$的线段长公式,如图 9-5(b).

4)　当 $CD = 0$ 时,四边形退化为三角形,上述结论即为:E 为 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的点,且$\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$(图 9-6),则 EC 长

$$l = \frac{1}{m+n}\sqrt{(am)^2 + (bn)^2 + 2am \cdot bn \cdot \cos C}, \qquad (*)$$



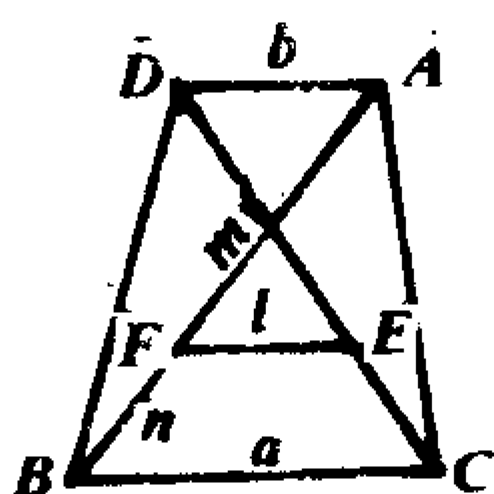


图 9-5

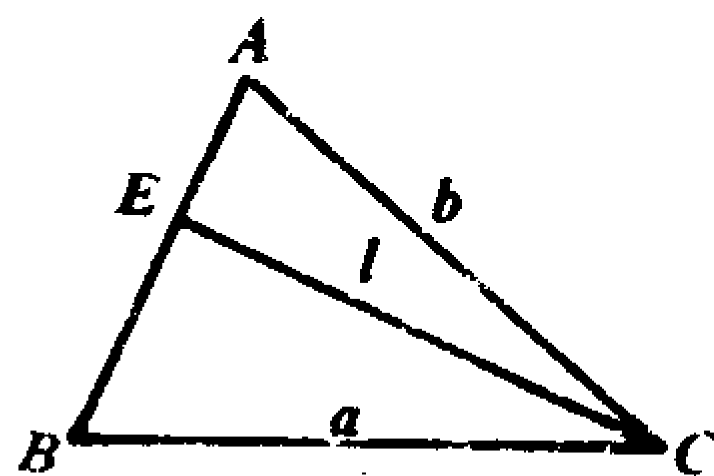


图 9-6

将 $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 代入得

$$l = \frac{1}{m+n}\sqrt{(am)^2 + (bn)^2 + m \cdot n(a^2 + b^2 - c^2)} \tag{Ⅲ}$$

5) 将 $m = n$ 代入(Ⅲ),化简得

$$AC^2 + BC^2 = 2(EC^2 + AE^2)$$

为阿波罗尼斯定理.

6) 在图 9-6 中,当 CE 为角平分线时,即有 $\dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{a}$,代入(Ⅲ)式,得

$$l = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]} \tag{Ⅳ}$$

为角平分线长公式;

7) 在图 9-6 中,若令 $AE = m$, $EB = n$,则 $c = m + n$,代入(Ⅳ)得

$$l = \sqrt{ab - ab\left(\frac{m+n}{a+b}\right)^2} = \sqrt{ab - ab\frac{n^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{ab - \frac{b}{a}n^2} = \sqrt{ab - \frac{m}{n}n^2}$$

$$= \sqrt{ab - mn}.$$

所以 $l^2 = ab - mn$,为斯库顿定理.

8)　在图 9-3 中，令 D 重合于 C，则 $\alpha=\angle C, AB=c, EF$ 变为 CE，图 9-3 退化为图 9-1. 记 $CE=d$. $AE=m, EB=n$. 则 $c=m+n$. 代入(Ⅰ)式，得

$$(m+n)^2d^2$$
$$=(am)^2+(bn)^2+2am\cdot bn\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

即　$c^2d^2=(am)^2+(bn)^2+mn(a^2+b^2-c^2)$

$$=a^2m(m+n)+b^2n(n+m)-mnc^2$$
$$=a^2mc+b^2nc-mnc^2.$$

得　$a^2m+b^2n=cd^2+mnc.$

即　$BC^2\cdot AE+AC^2\cdot BE=CE^2\cdot AB+AE\cdot EB\cdot AB$

为斯蒂瓦特定理.

你看定理 9.2 的"胃口"多大呀！在爱可尔斯定理一章(定理 19.2 的证明中)，我们还要看到它的一个应用.

最后我们给出阿波罗尼斯定理向三维空间的一个推广.

3. 向三维空间推广

定理 9.3　平行六面体四条对角线的平方和等于其各棱的平方和.

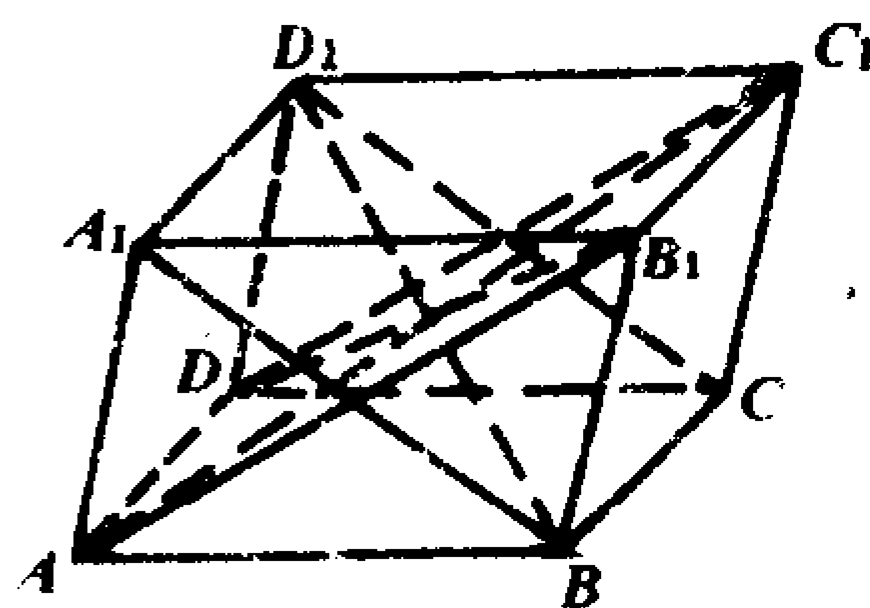


图 9-7

证明　如图 9-7 所设，在 $\square A_1BCD_1$ 中，有

$$BD_1^2+A_1C^2=2(A_1B^2+BC^2).$$

同理，在 $\square AB_1C_1D$ 中，有

$$AC_1^2+B_1D^2=2(AB_1^2+AD^2)$$

所以有　$AC_1^2+A_1C^2+B_1D^2+BD_1^2$

$$=2(A_1B^2+AB_1^2+BC^2+AD^2).$$

又因为　$BC = AD, A_1B^2 + AB_1^2 = 2(AB^2 + AA_1^2)$

所以有

$$AC_1^2 + A_1C^2 + B_1D^2 + BD_1^2 = 4(AB^2 + AD^2 + AA_1^2).$$

§9.4　定理的应用

例 9.1　已知：AM 是 Rt△ABC 的斜边 BC 上的中线. 求证：

$$BC^2 + AC^2 + AB^2 = 8AM^2.$$

证明　因为　AM 是 Rt△ABC 的斜边 BC 上的中线.

所以　$AM = BM = MC$.

由阿波罗尼斯定理，得

$$AC^2 + AB^2 = 2(AM^2 + BM^2).$$

所以

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 + AB^2 &= BC^2 + 2(AM^2 + BM^2) \\ &= (2BM)^2 + 2(AM^2 + BM^2) \\ &= (2AM)^2 + 2(AM^2 + AM^2) \\ &= 8AM^2. \end{aligned}$$

例 9.2　已知 P 为矩形 $ABCD$ 内任一点，求证：

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

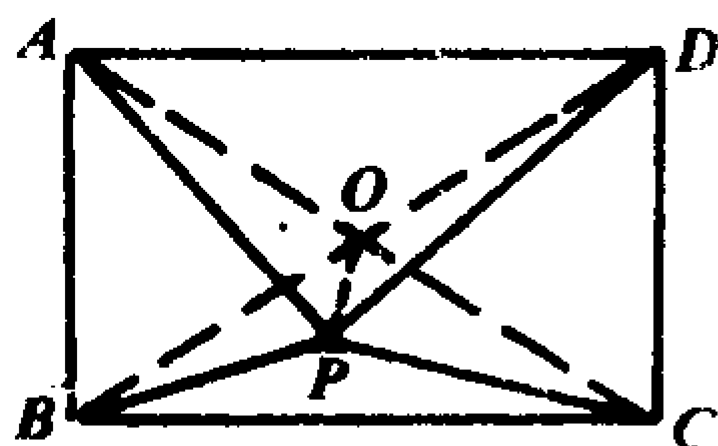


图 9-8

证明　如图 9-8，连 AC、BD 交于 O，连 PO，由阿波罗尼斯定理有

$$PA^2 + PC^2 = 2(OA^2 + PO^2),$$

$$PB^2 + PD^2 = 2(OB^2 + PO^2),$$

因　为

$$OA = OB,$$

所以　$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$

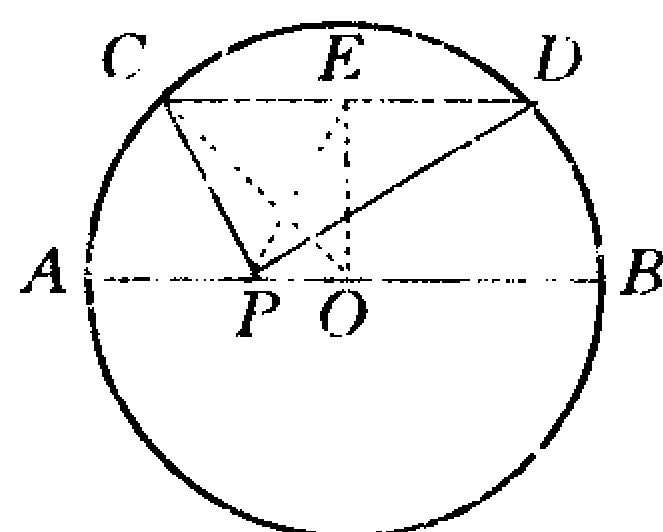


图 9-9

例 9.3　设 CD 是 ⊙O 内一条弦，且与直径 AB 平行，P 为 AB 上一点，求证：

$$PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2.$$

证明 如图 9-9，过 O 作 $OE \perp CD$ 于 E，则 $CE = ED$，连 OC、PE，又 $AO = OB = OC = R$，在 $\triangle PCD$ 中，由阿波罗尼斯定理，有

$$\begin{aligned}
PC^2 + PD^2 &= 2(PE^2 + CE^2) \\
&= 2[(PO^2 + EO^2) + (R^2 - OE^2)] \\
&= 2(PO^2 + R^2).
\end{aligned}$$

又 $\quad PA^2 + PB^2 = (R - PO)^2 + (R + PO)^2$

$$= 2(PO^2 + R^2).$$

所以 $\quad PA^2 + PB^2 = PC^2 + PD^2.$

例 9.4 设 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 分别是共线三点 A、B、C 对于 $\odot O$ 所作切线的长，求证：

$$a \cdot BC + c \cdot AB = b \cdot AC + BC \cdot AC \cdot AB.$$

证明 如图 9-10，设 $\odot O$ 半径为 r，连 OA、OB、OC，则由斯蒂瓦特定理，有

$$\begin{aligned}
& OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB \\
&= OB^2 \cdot AC + BC \cdot AC \cdot AB,
\end{aligned}$$

又 $\quad OA^2 = r^2 + a,\ OB^2 = r^2 + b,$

$$OC^2 = r^2 + c,$$

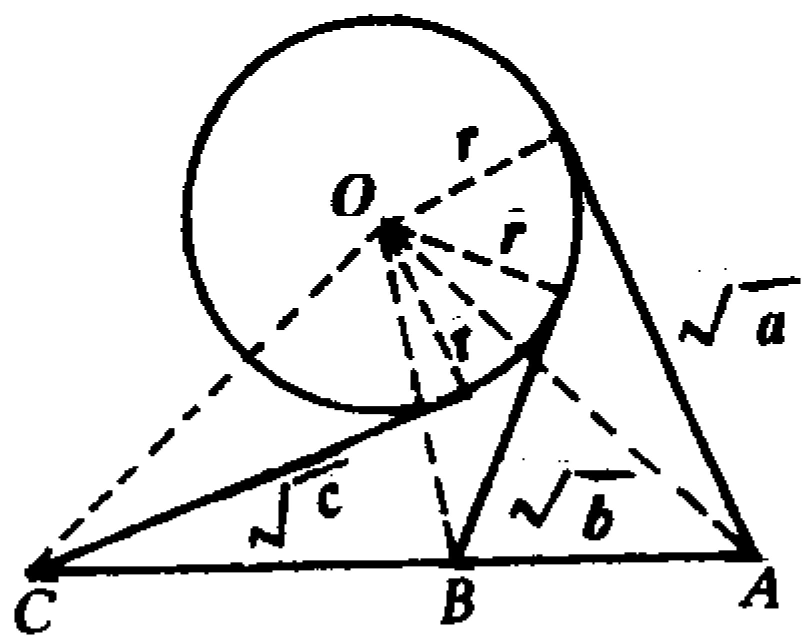


图 9-10

代入上式，得

$$\begin{aligned}
& a \cdot BC + c \cdot AB + r^2 \cdot (AB + BC) \\
&= b \cdot AC + BC \cdot AC \cdot AB + r^2 \cdot AC
\end{aligned}$$

所以 $\quad a \cdot BC + c \cdot AB = b \cdot AC + BC \cdot AC \cdot AB.$

例 9.5 已知平行六面体的棱都相等，且其对角线的长分别为 a、b、c、d，求平行六面体的棱长.

解 设该平行六面体的棱长为 x，则由定理 9.3 得

$$4(x^2+x^2+x^2)=a^2+b^2+c^2+d^2$$

解之得 $x=\dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2+d^2)}}{6}$.

为平行六面体的棱长.

练习与思考

1. m_1、m_2、m_3 分别表示 $\triangle ABC$ 的三条中线长，a、b、c 为其三边的长，则

$$m_1^2+m_2^2+m_3^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

2. 已知任意四边形 $ABCD$ 两对角线 AC、BD 的中点分别是 E、F，则有

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$

第十章　三角形的五心

§10.1　定　　理

重心定理　三角形的三条中线交于一点，这点到顶点的距离是它到对边中点距离的2倍.

上述交点叫做三角形的**重心**.

外心定理　三角形的三边的垂直平分线交于一点.

这点叫做三角形的**外心**.

垂心定理　三角形的三条高交于一点.

这点叫做三角形的**垂心**.

内心定理　三角形的三内角平分线交于一点.

这点叫做三角形的**内心**.

旁心定理　三角形一内角平分线和另外两顶点处的外角平分线交于一点.

这点叫做三角形的**旁心**. 三角形有三个旁心.

三角形的重心、外心、垂心、内心、旁心称为三角形的五心. 它们都是三角形的重要相关点.

上述的几个结论早在欧几里得时代均已被人发现，欧几里得除垂心定理外，均把它们作为重要定理收集在自己的《几何原本》里，但后来关于三角形这些特殊相关点的诸多研究及由此得出的许多著名结论表明，遗漏垂心定理不能不算是《几何原本》作者的一个疏忽.

§10.2 定理的证明

1. 首先证明重心定理

证法1 如图10-1，D、E、F为三边中点，设BE、CF交于G、连EF，则$EF \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$，$\triangle GEF \backsim \triangle GBC$.

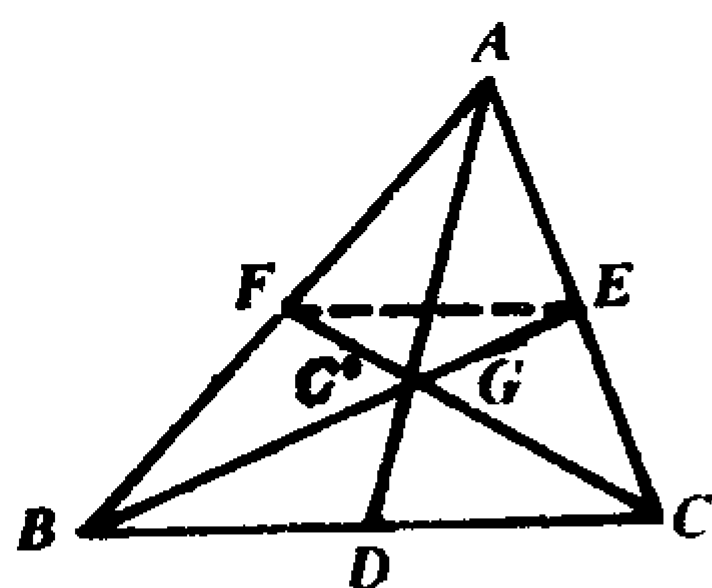


图 10-1

所以 $\frac{GE}{GB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FG}{CG}$，由$BC=2EF$，

得 $GB=2GE$，$GC=2GF$.

设AD、BE交于G'，同理可证$G'B=2G'E$，$G'A=2G'D$，

即G、G'都是BE上从B到E的三分之二处的点，故G'、G重合.

即三条中线AD、BE、CF相交于一点G.

证法2 设BE、CF交于G(图10-2)，BG、CG中点为H、I. 连HI、HF、EF、EI，则$EF \perp\!\!\!\!= HI \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BC$，

所以 $EFHI$为平行四边形.

所以 $HG=GE$、$IG=GF$，$GB=2GE$，$GC=2GF$. 又$HD \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}CG \perp\!\!\!\!= GF \Rightarrow \square GFHD$

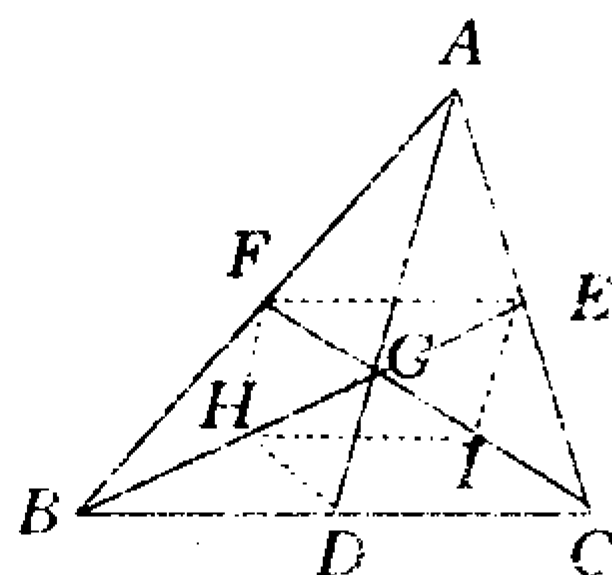


图 10-2

所以 $FH \perp\!\!\!\!= GD$.

又 $FH \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}AG$，所以$A$、$G$、$D$共线，且有

$DG=\frac{1}{2}AG$，

即 $AG=2GD$. 定理证毕.

证法3 因为$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$，由塞瓦定理的逆定理知

AD、BE、CF 共点. 后半部分同证法 1(略).

2. 证明外心定理

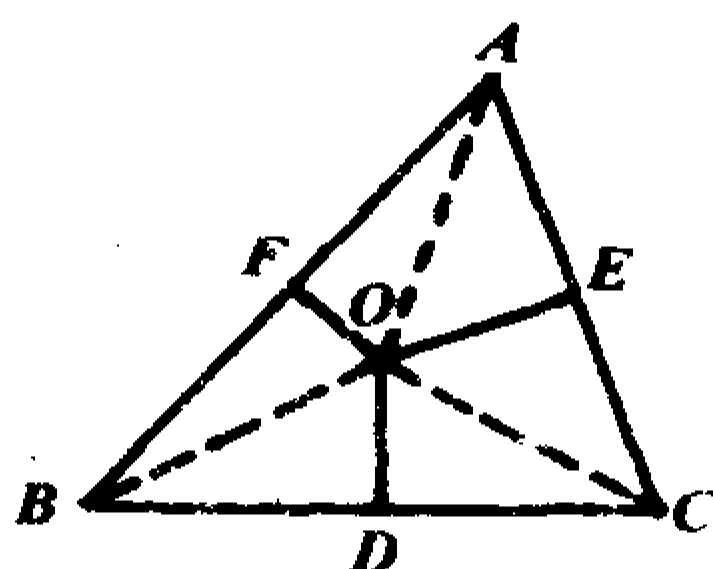


图 10-3

证明 如图 10-3,设 AB、BC 的中垂线交于点 O,则有 $OA=OB=OC$,故 O 也在 AC 的中垂线上,因为 O 到三顶点的距离相等,故点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心. 因而称为外心.

3. 证明垂心定理

在塞瓦定理一章,我们曾给出过它的一个证明,但垂心定理还有下面一个巧妙的证明.

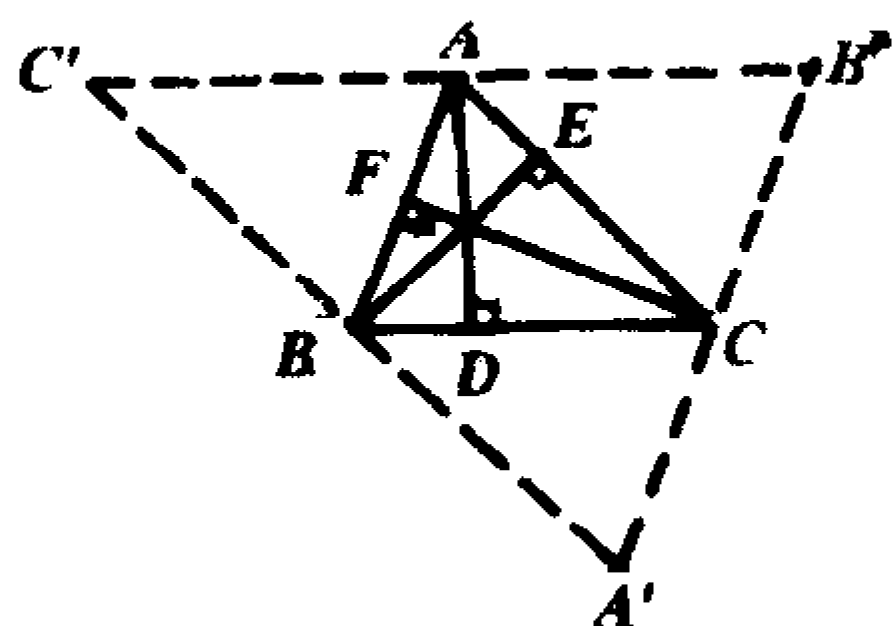


图 10-4

证明 如图 10-4,AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 三条高,过点 A、B、C 分别作对边的平行线相交成 $\triangle A'B'C'$,则得 $\square ABCB'$、$\square BCAC'$ 因此有 $AB'=BC=C'A$,从而 AD 为 $B'C'$ 的中垂线;同理 BE、CF 也分别为 $A'C'$、$A'B'$ 的中垂线,由外心定理,它们交于一点,命题得证.

4. 证明内心定理

关于内心定理,我们也曾在塞瓦定理一章给出过一个证明,下面是它的另一个证明.

证明 如图 10-5 设 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线相交于 I、过 I 作 $ID\perp BC$,$IE\perp AC$,$IF\perp AB$,则有 $IE=IF=ID$. 因此 I 也在 $\angle C$ 的平分线上,即三角形三内角平分线交于一点.

上述定理的证法完全适用于旁心定理，如图 10-6，我们不再另行论证.

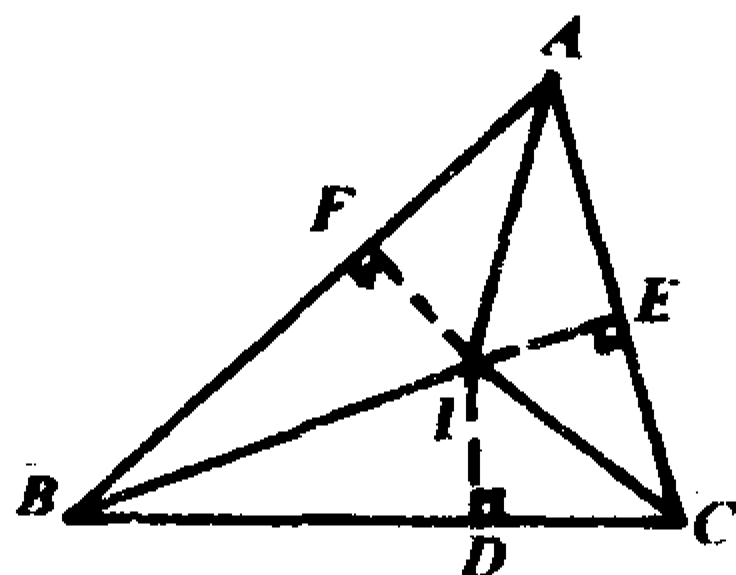


图 10-5

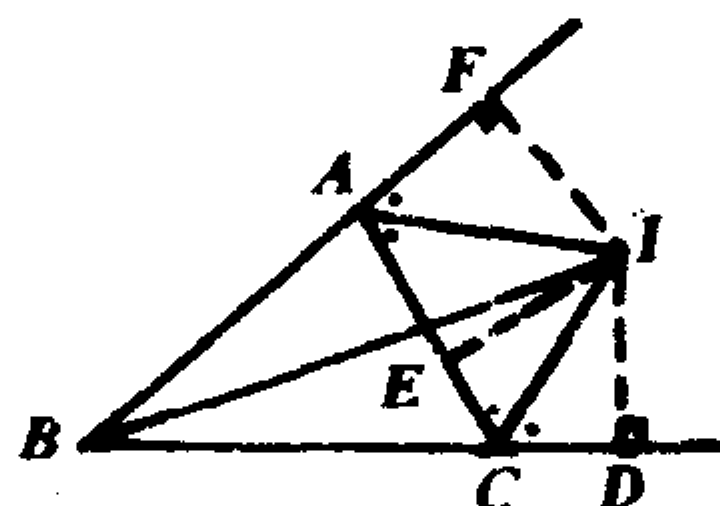


图 10-6

§10.3 引伸与推广

1. 重要性质及其相互间的联系

三角形的五心有许多重要性质，它们之间也有很密切的联系，如：

(1) 三角形的重心与三顶点的连线所构成的三个三角形面积相等；

(2) 三角形的外心到三顶点的距离相等；

(3) 三角形的垂心与三顶点这四点中，任一点是其余三点所构成的三角形的垂心；

(4) 三角形的内心、旁心到三边距离相等；

(5) 三角形的垂心是它垂足三角形的内心；或者说，三角形的内心是它旁心三角形的垂心；

(6) 三角形的外心是它的中点三角形[①]的垂心；

(7) 三角形的重心也是它的中点三角形的重心；

(8) 三角形的中点三角形的外心也是其垂足三角形的

① 三边中点所组成的三角形叫做原三角形的中点三角形

外心.

上述性质读者可自行证明,下面我们给出几个推广.

2. 重心定理的推广

定理 10.1 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的点,且 $\frac{AF}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}=\frac{1}{n}$,$AD$、$BE$、$CF$ 三线交得 $\triangle GHK$,则 $S_{\triangle GHK}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}S_{\triangle ABC}$.

证明 如图 10-7,直线 CKF 截 $\triangle ABD$,由梅涅劳斯定理,有

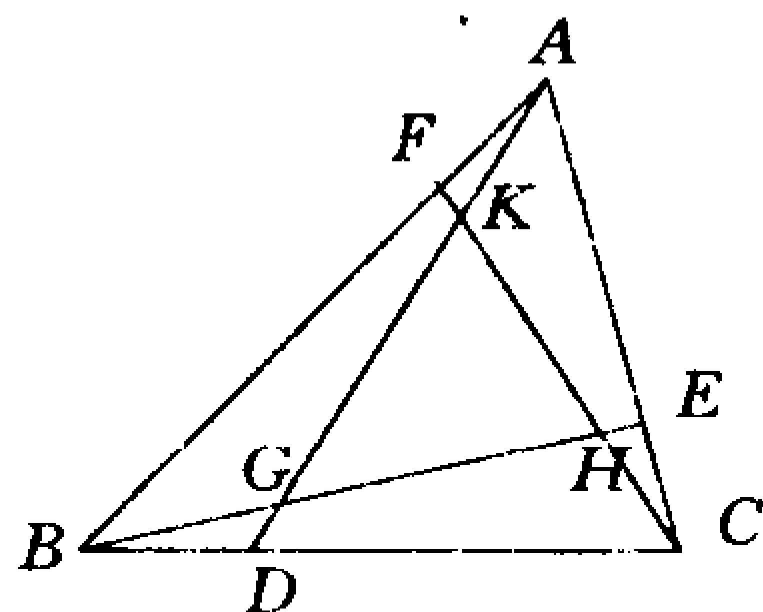


图 10-7

$$\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{AK}{KD}=\frac{n}{(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{AK}{AD}=\frac{n}{n^2-n+1}.$$

$$S_{\triangle AKC}=\frac{n}{n^2-n+1}\cdot\frac{n-1}{n}S_{\triangle ABC},$$

$$=\frac{n-1}{n^2-n+1}S_{\triangle ABC},$$

同理可证 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BCH}=\frac{n-1}{n^2-n+1}S_{\triangle ABC}$,

$$S_{\triangle GHK}=\left[1-\frac{3(n-1)}{n^2-n+1}\right]S_{\triangle ABC}=\frac{(n-2)^2}{n^2-n+1}S_{\triangle ABC}.$$

虽然当 $n=2$ 时,有 $S_{\triangle GHK}=0$,G、H、K 重合于重心.

如果我们称 $n(\geqslant 3)$ 边形某顶点同除该点以外的 $n-1$ 个顶点所决定的 $n-1$ 边形的重心的连线,为 n 边形的中线,(当 $n-1=2$ 时,$n-1$ 边形退化成一线段,此时重心即为线段的中心) 那么重心定理可推广如下:

定理 10.2 n 边形的各条中线(若有重合,只算一条) 相

交于一点，各中线被该点分为：$(n-1):1$ 的两条线段，这点叫 n 边形的重心.

证明　当 $n=3$ 时为重心定理，结论成立，假设 $n=k-1$，$(k\geqslant 4)$ 时，命题成立，则当 $n=k$ 时，在 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 中，如图10-8，若 S 是 $k-2$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{k-2}$ 的重心，则 $A_{k-1}S$、A_kS 分别是 $k-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{k-2}A_{k-1}$ 和 $A_1A_2\cdots A_{k-2}A_k$ 的中线.

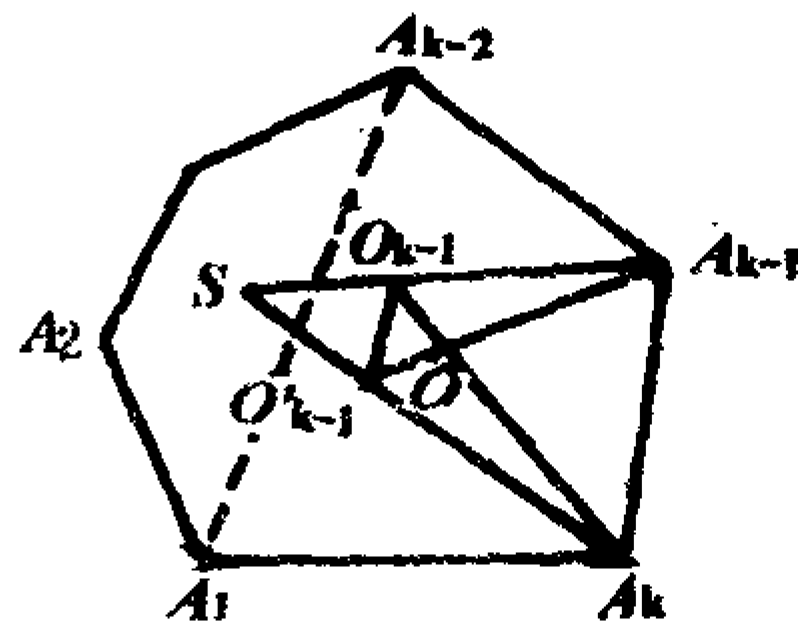


图 10-8

设 O_{k-1} 和 O'_{k-1} 分别是 $k-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{k-2}A_{k-1}$ 和 $A_1A_2\cdots A_{k-2}A_k$ 的重心，则根据假设有

$$\frac{A_{k-1}O_{k-1}}{O_{k-1}S}=\frac{(k-1)-1}{1}=\frac{A_kO'_{k-1}}{O'_{k-1}S}.$$

连接 A_kO_{k-1}，$A_{k-1}O'_{k-1}$，则它们是 k 边形的两条中线，且交于一点，设交点为 O，连接 $O_{k-1}O'_{k-1}$，则有 $O_{k-1}O'_{k-1}\parallel A_{k-1}A_k$，

所以　$\triangle OO_{k-1}O'_{k-1}\backsim\triangle OA_{k-1}A_k$.

有　$$\frac{A_{k-1}O}{OO'_{k-1}}=\frac{A_kO}{OO_{k-1}}=\frac{k-1}{1}.$$

因此，k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的相邻两条中线 $A_{k-1}O'_{k-1}$，A_kO_{k-1} 交于 O 点，且被 O 点内分为 $(k-1):1$. 同理可证 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的任意相邻两条中线的交点内分每条中线为 $(k-1):1$，由此推得，k 边形的所有中线过一点，且被这点内分为 $(k-1):1$.

综上所述，定理得证.

3. 外心定理的推广

定理 10.3　过 $\triangle ABC$ 三边中点 D、E、F 分别作与三边倾

斜角均为 α 的斜线且顺序一致，三斜线相交得 $\triangle GHK$，

则 $S_{\triangle GHK} = \cos^2\alpha \cdot S_{\triangle ABC}$.

证明 如图 10-9，首先我们证 $\triangle KGH \backsim \triangle ABC$，

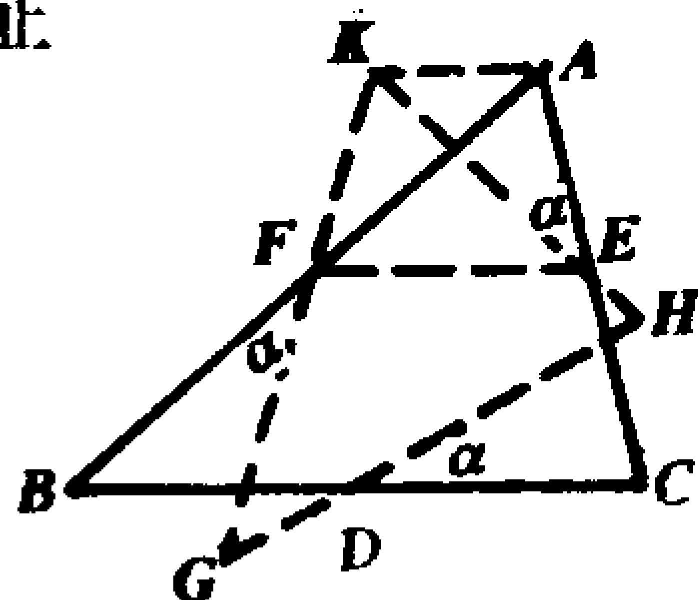


图 10-9

因为 $\angle KFA = \alpha = \angle KEA$，

因为 A、K、F、E 四点共圆，

所以 $\angle GKH = \angle BAC$.

同理可证 $\angle G = \angle B$，$\angle H = \angle C$，故 $\triangle KGH \backsim \triangle ABC$.

又由正弦定理，有

$$\frac{KF}{AF} = \frac{\sin\angle KAF}{\sin\angle AKF} = \frac{\sin\angle KEF}{\sin(180^\circ - \angle AEF)}$$

$$= \frac{\sin(\angle C - \alpha)}{\sin C}$$

所以 $$\frac{KF}{AB} = \frac{\sin(C - \alpha)}{2\sin C} \qquad ①$$

同理，B、G、D、F 共圆，有

$$\frac{FG}{BF} = \frac{\sin(\angle C + \alpha)}{\sin\angle C} \Rightarrow \frac{FG}{AB} = \frac{\sin(\angle C + \alpha)}{2\sin\angle C} \qquad ②$$

① + ② 得

$$\frac{KG}{AB} = \frac{1}{2\sin\angle C}[\sin(\angle C - \alpha) + \sin(\angle C + \alpha)] = \cos\alpha,$$

故有 $\dfrac{S_{\triangle KGH}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{KG}{AB}\right)^2 = \cos^2\alpha$，即 $S_{\triangle KGH} = \cos^2\alpha S_{\triangle ABC}$.

显然，当 $\alpha = 90^\circ$，即 $S_{\triangle KGH} = 0$ 时正是外心定理.

对外心定理，还有下面的推广

定理 10.4 在 $\triangle ABC$ 中，三边分别为 a、b、c，设 $AF = \dfrac{1}{n}AB$，$BD = \dfrac{1}{n}BC$，$CE = \dfrac{1}{n}CA$，过 D、E、F 各作三边的垂线

交得 $\triangle GHK$，则

$$S_{\triangle GHK}=\frac{(n-2)^2}{16n^2}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{S_{\triangle ABC}}.$$

证明略.

4. 垂心定理的推广

定理 10.5 从 $\triangle ABC$ 三顶点分别作对边的斜线，与对边的交角为 α，且顺序一致，三斜线相交成 $\triangle GHK$，则

$$S_{\triangle GHK}=4\cos^2\alpha\cdot S_{\triangle ABC}.$$

证明 如图 10-10，过 A、B、C 分别作对边的平行线交得 $\triangle A'B'C'$，则 A、B、C 分别为 $\triangle A'B'C'$ 三边的中点，由定理 10.3 有

$$S_{\triangle GHK}=\cos^2\alpha\cdot S_{\triangle A'B'C'}=4\cos^2\alpha\cdot S_{\triangle ABC}.$$

显然，$\alpha=90°$ 时为垂心定理.

垂心定理还可理解为三角形一顶点与另两条高交点的连线垂直于对边，那么对五边形，我们有

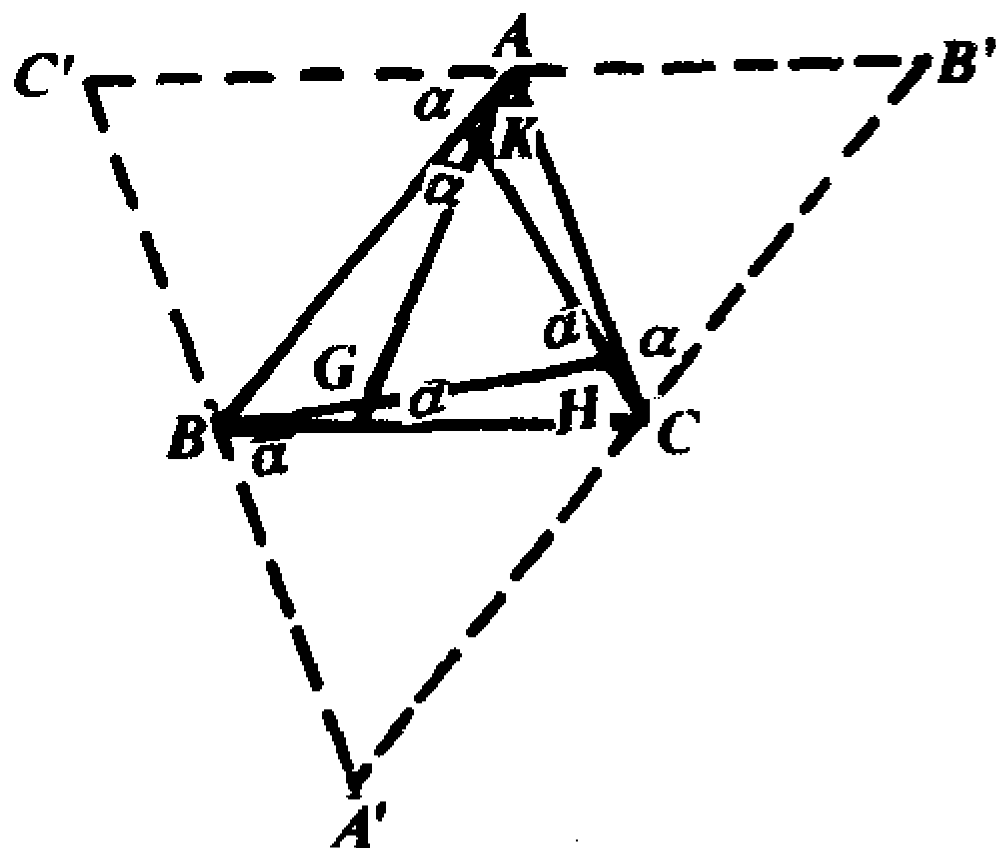


图 10-10

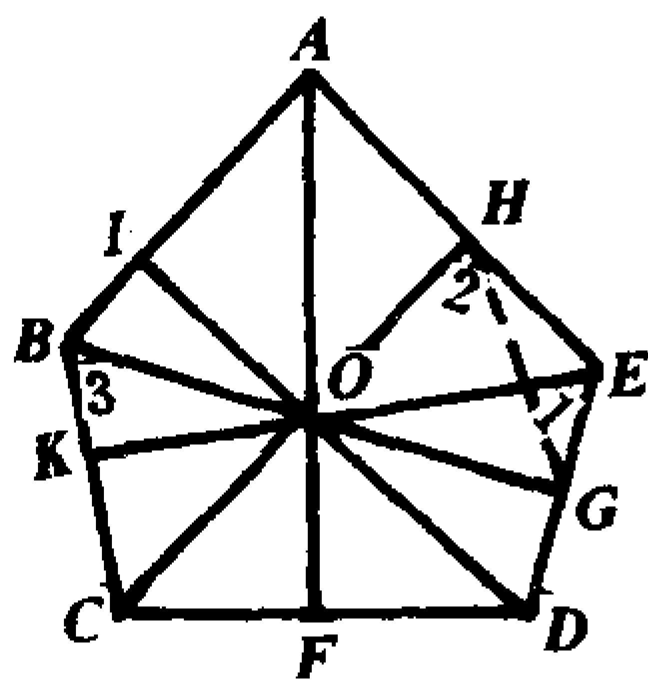


图 10-11

定理 10.6 在一五边形中，若有四个顶点向对边所作的高交于一点，则第五个顶点与其交点的边线也垂直于对边.

证明 如图 10-11，设在五边形 $ABCDE$ 中，$AF\perp CD$、

$BG \perp DE$、$CH \perp AE$，$DI \perp AB$；且 AF、BG、CH、DI 交于 O 点，连接 EO 并延长交 BC 于 K，连 HG，则四边形 $AHFC$、$AIFD$、$BIGD$、$OHEG$ 各内接于圆.

所以　$OA \cdot OF = OH \cdot OC$，　　$OA \cdot OF = OI \cdot OD$，

$OI \cdot OD = OB \cdot OG$，　　$\angle 1 = \angle 2$.

所以　$OH \cdot OC = OB \cdot OG$，故 C、B、H、G 内接于圆.

所以　$\angle 2 = \angle 3$，则 $\angle 1 = \angle 3$　所以四边形 $BEGK$ 内接于圆. 而 $BG \perp DE$，故 $EK \perp BC$，命题得证.

此结论可推广到 $2n+1$ 边形.

§10.4　定理的应用

例 10.1　设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，M、N 分别为 BC、CA 的中点，求证：四边形 $GMCN$ 和 $\triangle GAB$ 的面积相等.

证明　如图 10-12，连 GC，则

$$S_{\triangle GMC} = \frac{1}{2}S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC},$$

同理　$S_{\triangle GCN} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$.

所以　$S_{四边形GMCN} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle GAB}$.

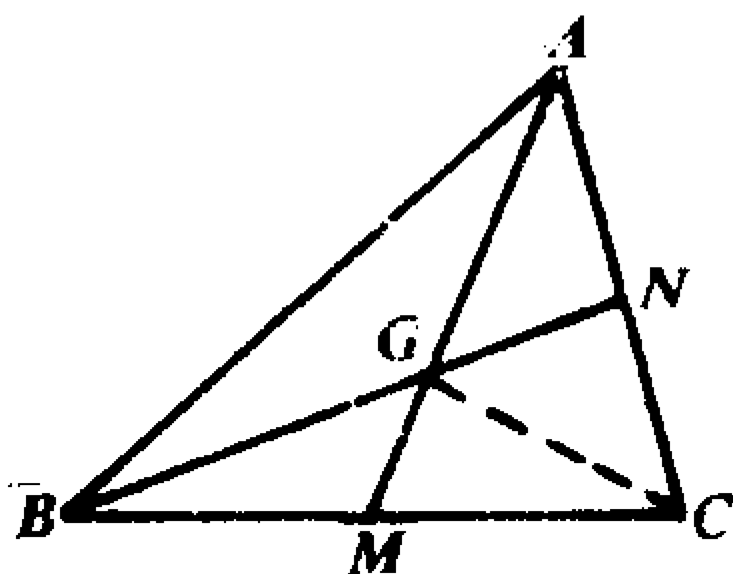


图 10-12

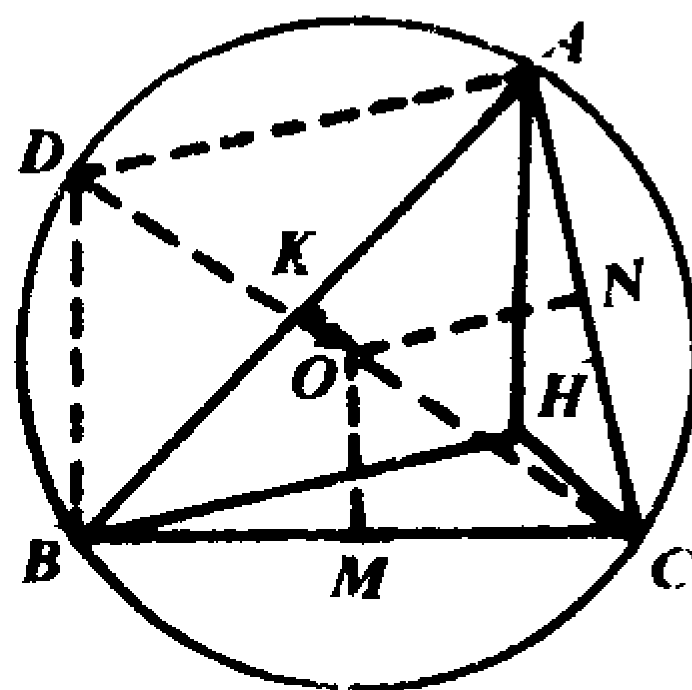


图 10-13

例 10.2 三角形的任一顶点到垂心的距离，等于外心到对边的距离的二倍.

证明 如图 10-13，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，H 为垂心，连 CO 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 D，连 DA、DB，则 $DA \perp AC$，$BD \perp BC$，又 $AH \perp BC$，$BH \perp AC$.

所以 $DB \parallel AH, DA \parallel BH \Rightarrow \square DBHA \Rightarrow AH = DB$，

又 $DB = 2OM$，所以 $AH = 2OM$.

同理可证 $BH = 2ON$，$CH = 2OK$. 证毕.

例 10.3 AD 是 $\triangle ABC$ 的一条高；以 AB、AC 为边向外作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$，连 BG、EC，求证：AD、BG、CE 相交于一点.

证明 如图 10-14，延长 DA 至 K，使 $AK = BC$，连 FK、KH；则 $\triangle KAH \cong \triangle BCA$，$\triangle KAF \cong \triangle CBA$，连 KC、KB，则可得 $\triangle KAC \cong \triangle BCG$，$\triangle KAB \cong \triangle CBE$.

于是 $\angle ACK = \angle CGB$，$\angle KBA = \angle BEC$，

且它们分别为 $\angle KCG$ 及 $\angle KBE$ 的余角.

所以 $BG \perp KC$，$CE \perp KB$，

从而 AD、BG、CE 为 $\triangle KBC$ 的三条高线，故它们相交于一点.

例 10.4 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，圆 O 内切 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D，且与边 AB、AC 分别相切于 P、Q，证明：线段 PQ 的中点是 $\triangle ABC$ 的内心.

证明 如图 10-15，连接 AD、PD、QD，易知 AD 平分 $\angle PDQ$ 及 $\angle A$，

因为 $PQ \parallel BC$，

所以 $\angle APQ = \angle ABC$ ①

又 AB 切 $\odot O$ 于 P，

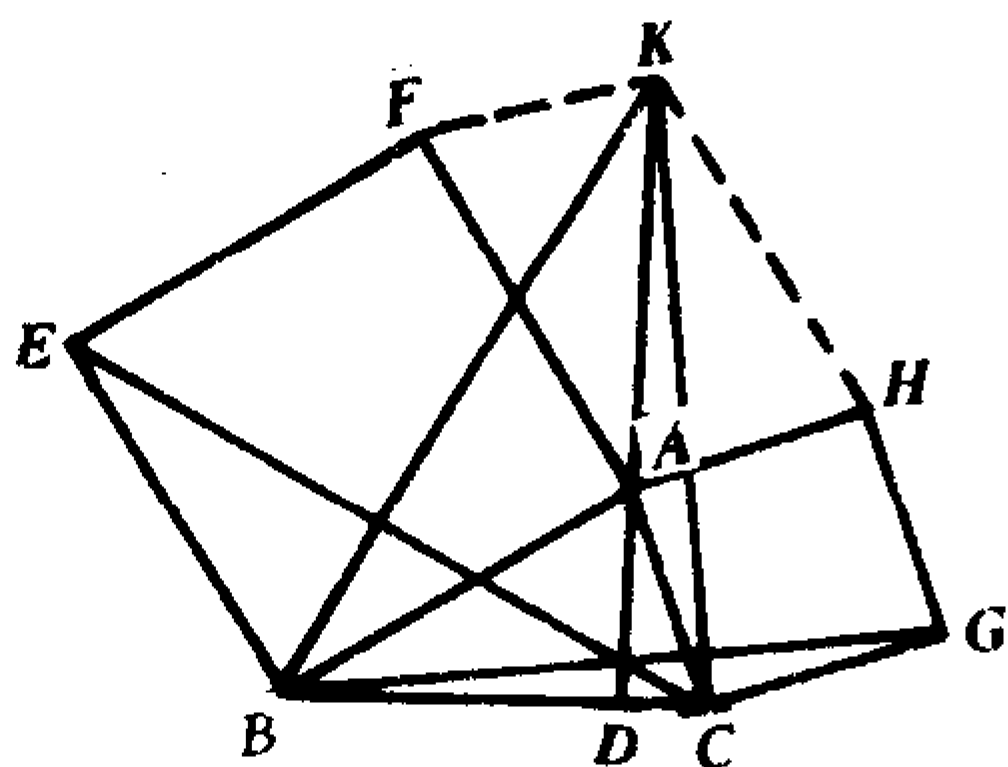


图 10-14

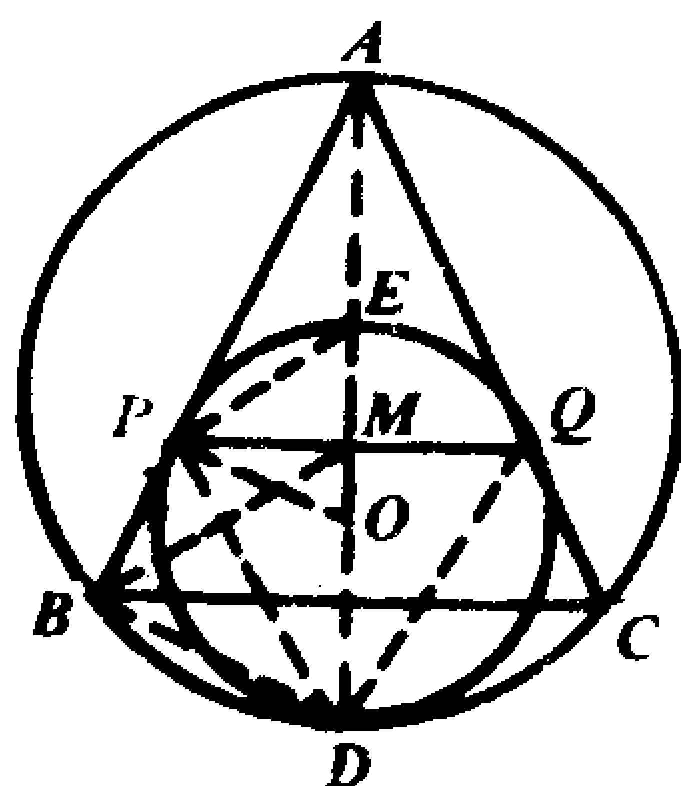


图 10-15

则 $\angle APQ = \angle PDQ = 2\angle PDM$ ②

再连 BD、BM，由于 $\angle PBD = \angle PMD = 90°$，故 P、B、D、M 四点共圆.

所以 $\angle PBM = \angle PDM$. ③

由 ①、②、③ 可得：$\angle PBM = \angle MBC$.

即 BM 是 $\angle ABC$ 的平分线，而 AM 是 $\angle A$ 的平分线，所以交点 M 是 $\triangle ABC$ 的内心.

这是第 20 届国际数学奥林匹克竞赛试题，其实当 $AB \neq AC$ 时，结论也成立，这个问题留给有兴趣的读者进一步探究.

练习与思考

1. 证明本章"引伸与推广部分命题(1)—(8).

2. G 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\angle A = 90°$，求证：

$$GB^2 + GC^2 = 5GA^2.$$

3. $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O、H，$\angle A = 60°$，求证：$AO = AH$.

4. $\triangle ABC$ 中，$BC = 14\text{cm}$，BC 边上的高 $AD = 12\text{cm}$，内接圆半径 $r = 4\text{cm}$，求 AB、AC 之长.

第十一章　欧拉线

§11.1　定　　理

欧拉线定理　任意三角形的垂心 H、重心 G 和外心 O，三点共线，且 $HG = 2GO$.

上述定理中的直线通常称为三角形的欧拉线. 这个定理是1765年著名数学家欧拉提出并证明的.

欧拉(Euler，1707～1783年)是一位多产的数学家、物理学家和天文学家，他于1707年4月15日出生于瑞士的巴塞尔. 13岁上大学，17岁成为巴塞尔有史以来第一个年轻硕士，24岁成为物理讲座教授. 26岁成为数学教授及彼得堡科学院数学研究所的领导人. 欧拉的名字频繁地出现在数学的许多领域. 他19岁开始发表论文，半个多世纪始终以充沛的精力不倦地工作. 28岁时他右眼失明，59岁后左眼也视力减退，渐至失明. 在失明的19年间，欧拉以惊人的毅力，超人的才智凭着记忆和心算，仍然坚持富有成果的研究，他以口授子女记录的办法发表专著多部，论文400多篇，直至生命的最后一刻，一生共完成论文860多篇，后人出版他的全集多达72集.

上述定理的提出与解决，被称为所谓三角形几何学的开端.

§11.2　定理的证明

定理的证法是很多的，下面的证法1以其简明而著称.

证法 1　如图 11-1 中，设 M 为 AB 中点，连结 CM，则 G 在 CM 上，且 $CG=2GM$. 连 OM，则 OM 垂直平分 AB. 延长 OG 到 H'，使 $H'G=2GO$，连 CH'.

因为 $\angle CGH'=\angle MGO$，所以 $\triangle CH'G \backsim \triangle MOG$，从而 $CH' \parallel OM$，即 $CH' \perp AB$. 同理 $AH' \perp BC$，即 H' 为垂心，命题得证.

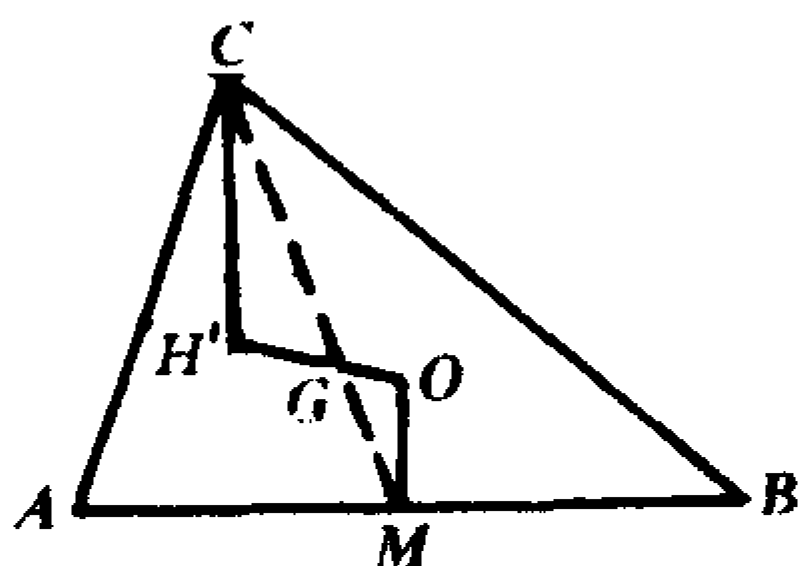


图 11-1

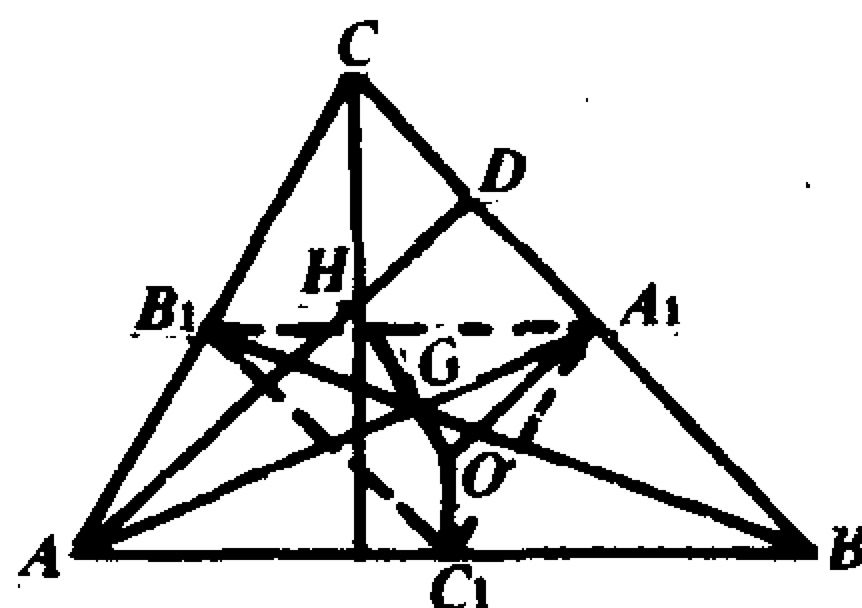


图 11-2

证法 2　设 A_1、B_1、C_1 分别为 $\triangle ABC$ 三边的中点，取重心 G 为位似中心，且位似比：$AG:GA_1=2:1$（如图 11-2）.

在此位似的变换下，A、B、C 的对应点分别为 A_1、B_1、C_1. $\triangle ABC$ 的垂心的对应点为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

因为　$AD \perp BC$，$B_1C_1 \parallel BC$，$A_1O \parallel AD$，

所以　$A_1O \perp B_1C_1$，同理 $C_1O \perp A_1B_1$.

所以　O 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心.

于是 O、G、H 三点共线，且 $OG:GH=1:2$.

证法 3　如图 11-3，以 $\triangle ABC$ 的外心 O 为原点建立直角坐标系，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则有外心 $O(0,0)$，重心 G

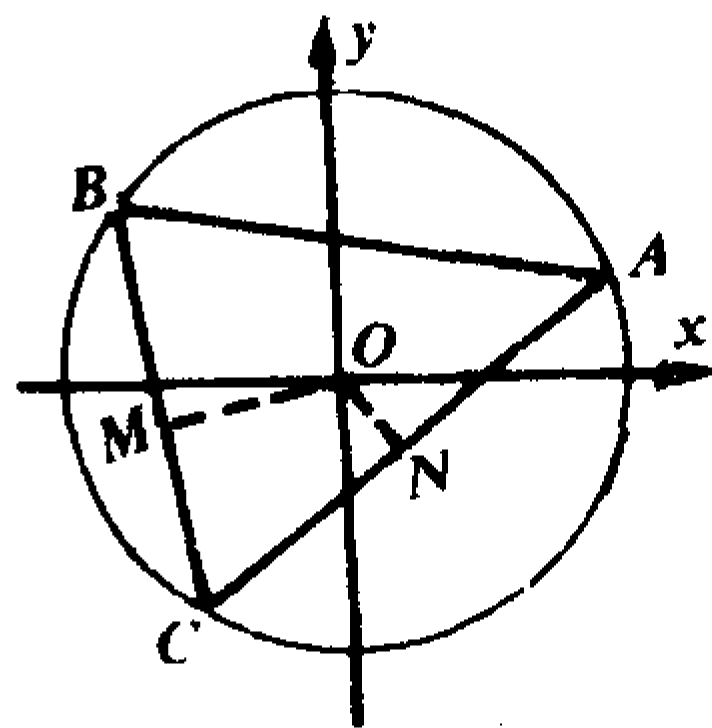


图 11-3

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，作 $OM\perp BC$ 于 M，$ON\perp AC$ 于 N，则 M、N 分别为 BC、AC 的中点，故 OM、ON 的斜率分别为 $\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}$、$\frac{y_1+y_3}{x_1+x_3}$.

设垂心 H 的坐标为 (x,y)，则 x、y 为

$$\begin{cases} y-y_1=\dfrac{y_2+y_3}{x_2+x_3}(x-x_1) & ① \\ y-y_2=\dfrac{y_1+y_3}{x_1+x_3}(x-x_2) & ② \end{cases}$$

的解.

由 ① − ② 得

$$y_2+y_3-(y_1+y_3)=\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}(x-x_1)-\frac{y_1+y_3}{x_1+x_3}(x-x_2)$$

移项整理可得

$$[x-(x_1+x_2+x_3)]\left[\frac{y_2+y_3}{x_2+x_3}-\frac{y_1+y_3}{x_1+x_3}\right]=0,$$

后一因式为 OM、ON 的斜率之差，故不为 0，

所以 $\quad x=x_1+x_2+x_3$.

代入 ① 得 $\quad y=y_1+y_2+y_3$，所以垂心坐标为

$H(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$

(这一结论在第十五章中还要用到)

显然有 O、G、H 共线，且 $HG=2GO$.

§11.3 定理的推广

欧拉线定理有下面更一般的结论

定理 11.1 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，D、E、F 分别为 BC、

CA、AB 的中点，O' 为平面上任意一点，过点 A 的直线 $l_a \parallel O'D$，过点 B 的直线 $l_b \parallel O'E$，过点 C 的直线 $l_c \parallel O'F$，则 l_a、l_b、l_c 共点 H，且有 $HG = 2GO'$.

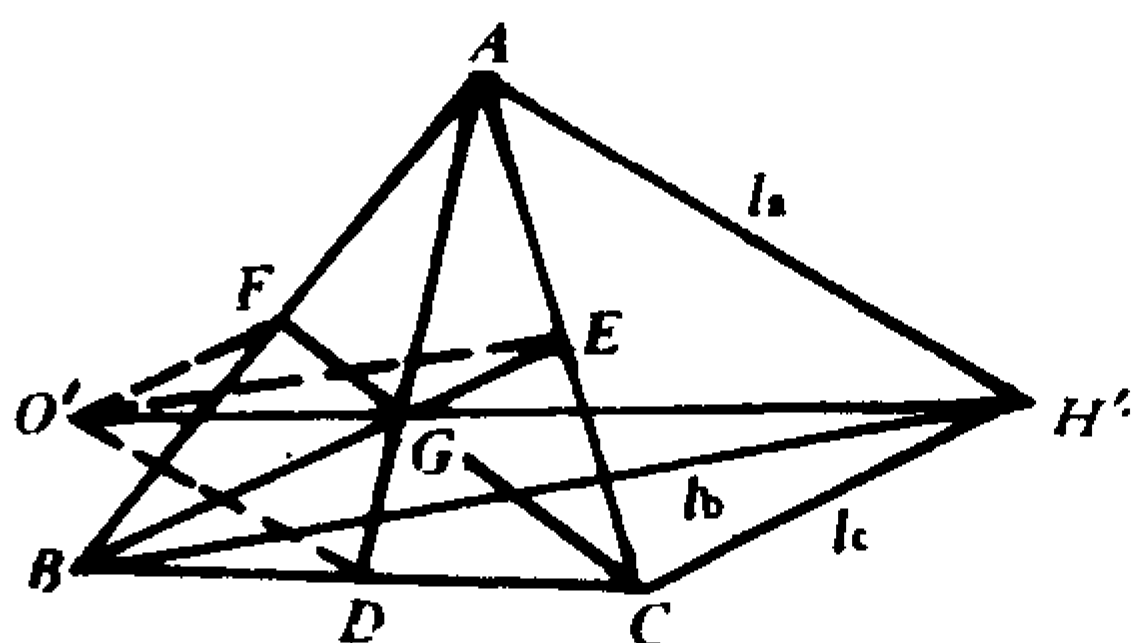


图 11-4

证明 如图 11-4，连 $O'G$ 至 H'，使 $G'H = 2GO'$，

又 $AG = 2GD$,

$\angle AGH' = \angle DGO'$.

所以 $\triangle AGH' \backsim \triangle DGO'$,

$\angle O'DG = \angle H'AG$,

从而 $AH' \parallel O'D$，故 AH' 即为直线 l_a，

即 H' 为 l_a 与 $O'G$ 的交点；

同理可证，l_b、l_c 与 $O'G$ 也交于 H'，

故 l_a、l_b、l_c 共点 H' 即 H，且有 $GH = 2O'G$.

显然，当点 O' 为 $\triangle ABC$ 的外心 O 时，$OD \perp BC$，有 $l_a \perp BC$，同理 $l_b \perp AC$，这时 H 即为 $\triangle ABC$ 的垂心，得前面所述的特殊情形.

§11.4 定理的应用

例 11.1 如图 11-5，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，对角线 $AC \perp BD$，$OE \perp AB$，E 为垂足，求证：$OE = \frac{1}{2}CD$.

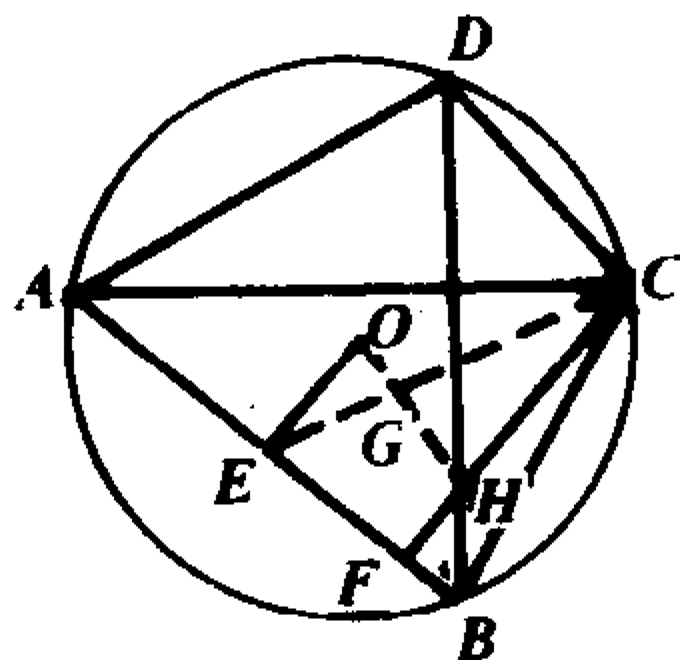


图 11-5

证明 作 $CF \perp AB$，交 BD 于 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

连 CE 交 OH 于 G，因为 O 为

$\triangle ABC$ 的外心，则 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 $GH : OG = 2 : 1$.

因为　$OE \parallel CF$.

所以　$CH : OE = GH : OG = 2 : 1$.

因为　$\angle ACD = \angle ABD = \angle ACF$,

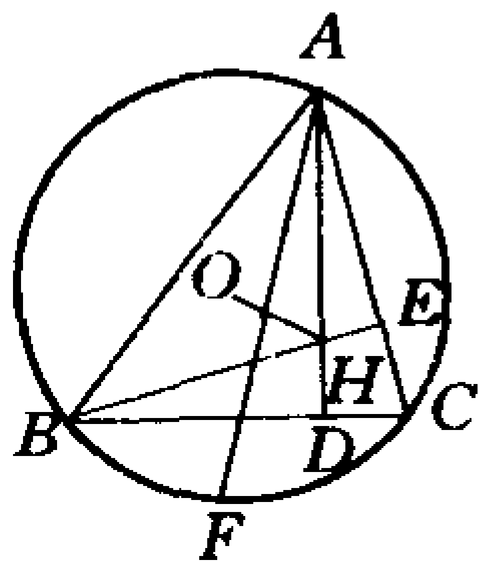
所以　$CD = CH$，从而有 $CD : OE = 2 : 1$,

即　$OE = \frac{1}{2}CD$.

练习与思考

1. 已知：$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，H 为垂心，$\angle BAC = 60°$，求证：$\angle BAC$ 的平分线垂直于欧拉线.

2. 如果 $\triangle ABC$ 的欧拉线平行于 BC 边，则 $\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C = 3$.



(第1题)

第十二章　欧拉定理

§12.1　定　　理

欧拉定理　设$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为r和R，圆心距为d，若存在一个三角形以$\odot O_1$为内切圆(或旁切圆)，同时又内接于圆O_2，则

$$d^2 = R^2 \mp 2Rr,$$

或
$$\frac{1}{d-R} - \frac{1}{d+R} = \mp \frac{1}{r}.$$

当$\odot O_1$为内切圆时取"－"号，为旁切圆时取"＋"号.

上述定理通常被称为关于三角形的欧拉定理，也有书称为察柏尔(Chapple)定理.但不论属于谁，这一定理的发现至今已有二百多年的历史.而且欧拉的学生富斯(N. Fuss)在1798年还给出了它的一个推广.

§12.2　定理的证明

证明　如图12-1(右图)，连AO_1，设其所在直线交$\odot O_2$于D，连BD，再过O_1作$\odot O_2$的直径EF，则由圆幂定理有

$$O_1D \cdot O_1A = O_1E \cdot O_1F = |R^2 - d^2|,$$

又　$AO_1 = \dfrac{r}{\sin\alpha}$,

$$\angle BO_1D = \beta \pm \alpha = \angle O_1BD.$$

(内切时取"＋"号，旁切时取"－"号)

所以　$O_1D = BD = 2R\sin\alpha$,

所以　$AO_1 \cdot O_1D = \frac{r}{\sin\alpha} \cdot 2R\sin\alpha = 2Rr.$

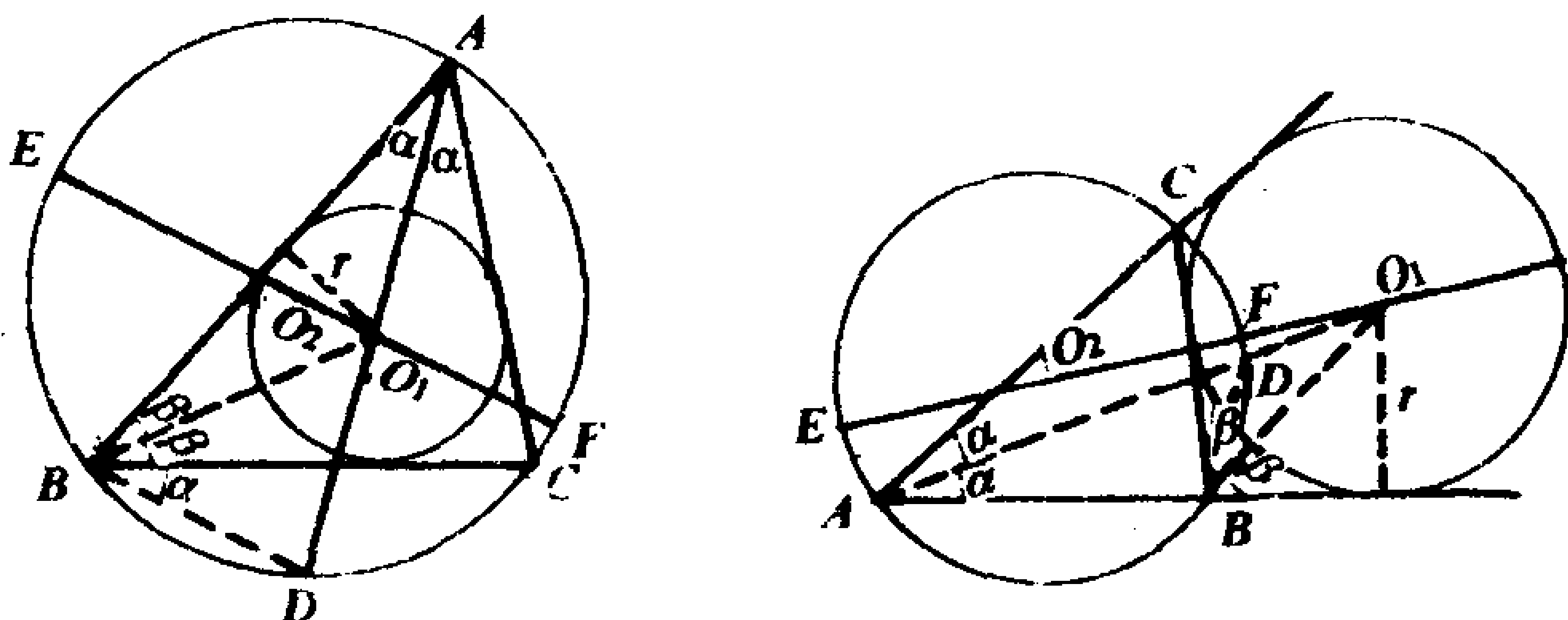


图 12-1

从而有　$$|R^2 - d^2| = 2Rr$$

当 $\odot O_1$ 为内切圆时，$R > d$，有 $d^2 = R^2 - 2Rr$；

当 $\odot O_1$ 为旁切圆时，$R < d$，有 $d^2 = R^2 + 2Rr$. 证毕.

欧拉定理的逆命题也成立.

逆定理　设 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r 和 R，圆心距为 d，若 $d^2 = R^2 \mp 2Rr$，则存在一个 $\triangle ABC$，它外切(或旁切)于 $\odot O_1$，又内接于 $\odot O_2$.

证明　如图 12-1(左图)，在 $\odot O_2$ 上任取一点 A，连 AO_1 交 $\odot O_2$ 于 D，在 $\odot O_2$ 上取点 B、C，使 $DB = DC = DO_1$.

因为　$DB = DO_1 = 2R\sin\alpha, DO_1 \cdot AO_1 = |R^2 - d^2|$

代入　$d^2 = R^2 \mp 2Rr$　化简得

$$r = AO_1 \cdot \sin\alpha, \qquad 即 \sin\alpha = \frac{r}{AO_1}.$$

故 AB 为 $\odot O_1$ 的切线，同理 AC 也为 $\odot O_1$ 的切线.

又因为　$\angle DBO_1 = \angle BO_1D = \beta \pm \alpha,$

$\angle DBC = \angle DAC = \alpha,$

所以　$\angle O_1BC = (\beta \pm \alpha) \mp \alpha = \beta.$

故 BC 也为 $\odot O_1$ 的切线，所以 $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆或旁切圆. 证毕.

§12.3　定理的引伸与推广

1. 定理的引伸

在欧拉定理中，若 $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 内切圆时，因为 $d^2 = R^2 - 2Rr \geqslant 0$，所以 $R \geqslant 2r$，从而有

定理 12.1　若 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，则 $R \geqslant 2r$.

2. 定理的推广

将三角形推广到四边形，得到

定理 12.2　设 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r、R，圆心距为 d，若存在一个四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot O_1$ 且内接于 $\odot O_2$，则

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

证明　(同一法) 如图 12-2，四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot O_1$，E、F、G、H 为切点，由弦切角性质，易得 $EG \perp FH$，设垂足为 M，连 AM、AO_1、EH，则 $AO_1 \perp EH$，设交点为 N，则

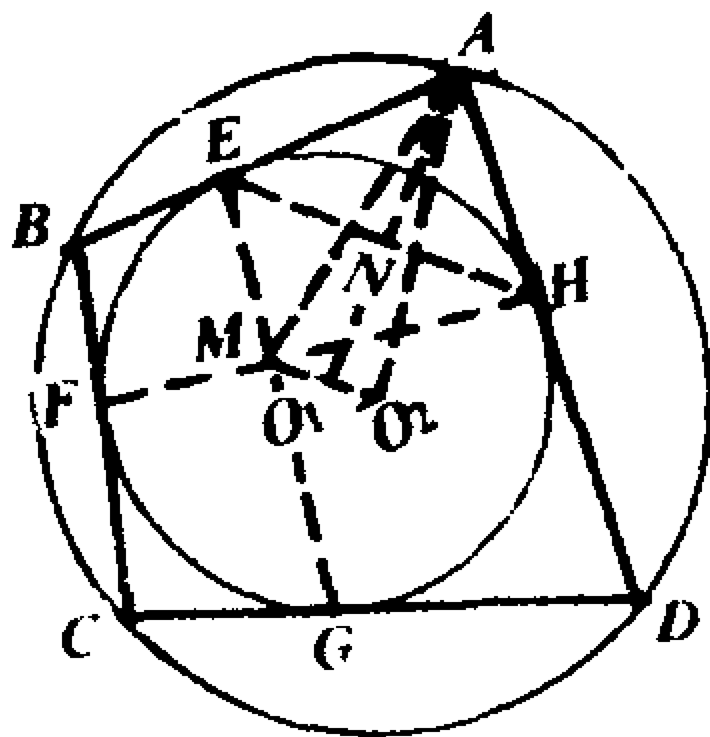


图 12-2

$$O_1N^2 + NH^2 = r^2,$$

又因为 $MN = NH$，

所以　$O_1N^2 + NM^2 = r^2.$

设 $\angle NO_1M = \alpha$，

则　$MN^2 = MO_1{}^2 + O_1N^2 - 2MO_1 \cdot O_1N\cos\alpha.$

令　$MO_1 = e, O_1N = x$　得

$2x^2 - 2x \cdot e\cos\alpha + e^2 = r^2,$

令 $O_1A=y$,则 $x\cdot y=r^2\Rightarrow x=\dfrac{r^2}{y}$,代入上式得

$$2\frac{r^4}{y^2}-2\frac{r^2}{y}\cdot e\cos\alpha+e^2=r^2,$$

或 $$\frac{2r^4}{r^2-e^2}=2\frac{r^2e}{r^2-e^2}y\cos\alpha+y^2.$$

延长 MO_1 至 O_2,连 AO_2,令 $O_1O_2=d$

则 $$O_2A^2=d^2+y^2+2dy\cos\alpha$$

在上式中取 $d=\dfrac{r^2e}{r^2-e^2}$,得

$$O_2A^2=\frac{r^4e^2}{(r^2-e^2)^2}+y^2+2\frac{r^2e}{r^2-e^2}y\cos\alpha$$

$$=\frac{r^4e^2}{(r^2-e^2)^2}+\frac{2r^4}{r^2-e^2}=k(\text{常数}).$$

同理可得 $O_2B^2=O_2C^2=O_2D^2=k$,

所以 A、B、C、D 四点共圆,即 $ABCD$ 内接于 $\odot O_2$.

令 $O_2A=R$ 得 $R^2=d^2+\dfrac{2r^4}{r^2-e^2}$.

即 $r^2-e^2=\dfrac{2r^4}{R^2-d^2}$,代入 $d=\dfrac{r^2e}{r^2-e^2}$ 得

$$e=\frac{2r^2d}{R^2-d^2}.$$

所以 $$r^2-e^2=r^2-\frac{4r^4d^2}{(R^2-d^2)^2}$$

$$=\frac{r^2}{(R^2-d^2)^2}[(R^2-d^2)^2-4r^2d^2].$$

即有 $$\frac{2r^4}{R^2-d^2}=\frac{r^2}{(R^2-d^2)^2}[(R^2-d^2)^2-4r^2d^2],$$

化简整理有

$$\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$$ 证毕.

上面的证明表明其逆命题也成立.同时还得到一个重要

结论：既有外接圆又有内切圆的四边形其对边切点连线的交点在两圆连心线上.

又将 $\frac{1}{(R-d)^2}+\frac{1}{(R+d)^2}=\frac{1}{r^2}$ 化为整式整理可得

$(d^2-R^2)[d^2-(R^2-2r^2)]=0$

显然 $d^2-R^2\neq O$，因此有 $d^2-(R^2-2r^2)=0$，

即 $d^2=R^2-2r^2\geqslant 0$，从而 $R\geqslant\sqrt{2}\,r$

这样我们又有

定理 12.3 若凸四边形既有外接圆又有内切圆，且外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，则 $R\geqslant\sqrt{2}\,r$.

更一般地，还有

定理 12.4 若凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 既有外接圆又有内切圆，设其外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，则

$$R\cos\frac{\pi}{n}\geqslant r.$$

证明略.

§12.4 定理的应用

下面几例是定理 12.1 的应用.

例 12.1 在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

证明 不难得到

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以 $R\geqslant 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$，

即 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$.

例 12.2 在 $\triangle ABC$ 中,求证:

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqslant 4.$$

证明 由正弦定理,有

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}}{\frac{abc}{(2R)^3}}=\frac{4R^2(a+b+c)}{abc}$$

由三角形的内切圆和外接圆半径公式知

$$a+b+c=\frac{2S}{r},abc=4RS,$$

所以 $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\dfrac{2R}{r}\geqslant\dfrac{4R}{R}=4.$

例 12.3 在 $\triangle ABC$ 中,求证:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{R}.$$

证明 因为 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant\dfrac{2}{ab}$, $\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant\dfrac{2}{bc}$.

$$\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\geqslant\frac{2}{ca},$$

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$.

故 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2\geqslant 3\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)$

$$=\frac{3(a+b+c)}{abc}=\frac{3\cdot\frac{2S}{r}}{4RS}=\frac{3}{2Rr}\geqslant\frac{3}{R^2}.$$

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{R}$.

练习与思考

1. $\triangle ABC$ 的内切圆分别切各边于 A'、B'、C'，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积 $\leqslant \frac{1}{4}\triangle ABC$ 的面积.

2. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，顶点到内心 O 的距离分别为 m、n、p，求证：$mnp \geqslant 8r^3$.

3. 已知 $\triangle ABC$，其三边长为 a、b、c，内切圆为 $\odot O$，切点三角形 DEF 的三条边长分别为 a_1、b_1、c_1，求证：$abc \geqslant 8a_1b_1c_1$.

4. 试证：正 n 边形内切圆与外接圆半径之比等于 $\cos\frac{\pi}{n}$.

第十三章　圆幂定理

§13.1　定　　理

相交弦定理　过圆内一点引两条弦，各弦被这点所分成的两线段的积相等.

切割线定理　从圆外一点向圆引切线和割线，切线长是这点到割线与圆的交点的两条线段长的比例中项.

割线定理　从圆外一点向圆引两条割线，则这一点到每条割线与圆的交点的两条线段的积相等.

上述三定理统称为圆幂定理，它们的发现至今已有两千多年的历史. 其中相交弦定理和切割线定理被欧几里得编入他的《几何原本》(第三篇的第35个命题和第36个命题).

它们有下面的统一形式

圆幂定理　过一定点作两条直线与定圆相交，则定点到每条直线与圆的交点的两条线段的积相等.

即它们的积为定值. 这里我们把相切看作相交的特殊情况，切点看作是两交点的重合. 若定点到圆心的距离为 d，圆半径为 r，则定值为 $|d^2-r^2|$.

如图13-1，当定点 P 在圆内时，$d^2-r^2<0$，其绝对值等于过定点的最小弦一半的平方；

当定点在圆上时，$d^2-r^2=0$；

当定点在圆外时，$d^2-r^2>0$，其值等于从定点向圆所引切线长的平方.

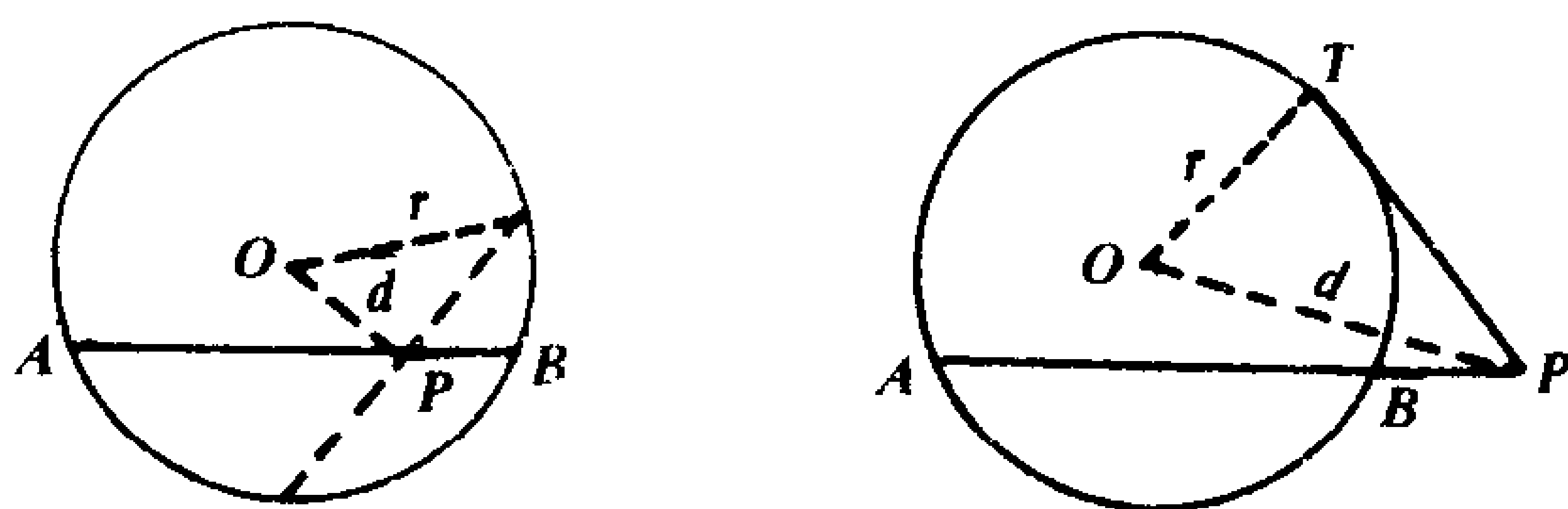


图 13-1

这或许是为什么称为圆幂定理的由来. 特别地我们把 $|d^2 - r^2|$ 称为定点对圆的幂. “幂”这个概念是瑞士数学家斯坦纳(见第十七章)最先引用的. 点对圆的幂是“圆几何学”的一个重要概念,圆幂定理则是“圆几何学”的一个基本定理.

§13.2 定理的证明

首先我们看到,切割线定理是割线定理当割线 PCD 运动到 C、D 两点重合于一点 T 的极限情况(图 13-2(b)),下面我们只就相交弦定理和割线定理给予证明.

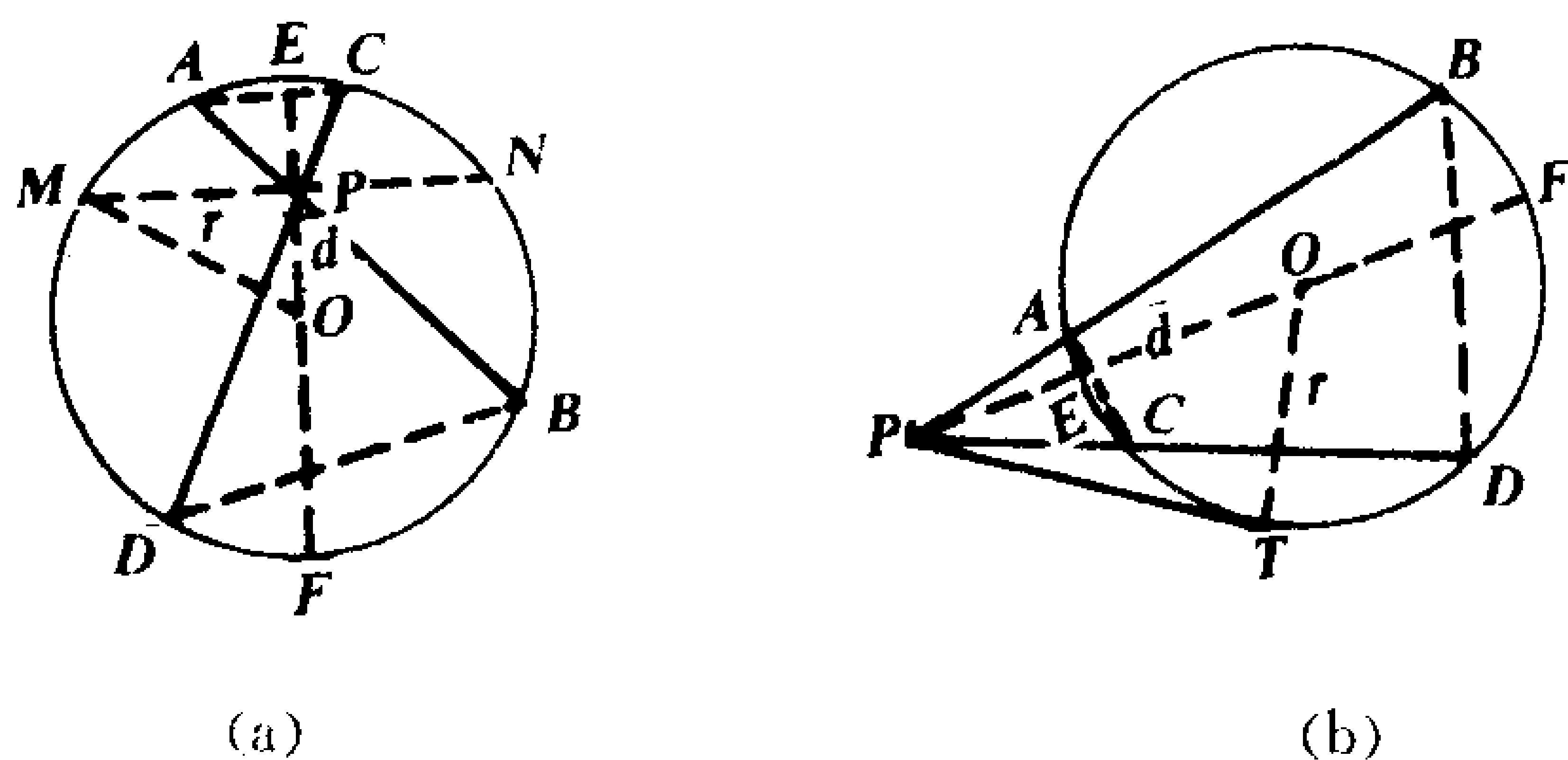


图 13-2

证明 如图 13-2,连 AC、BD,则 $\angle PAC = \angle PDB$,

又 $\angle APC = \angle BPD$,

所以　$\triangle PAC \backsim \triangle PDB \Rightarrow \dfrac{PA}{PC}=\dfrac{PD}{PB}$,

即　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$. 命题得证.

如果我们连 PO,交 $\odot O$ 于 E、F,则有

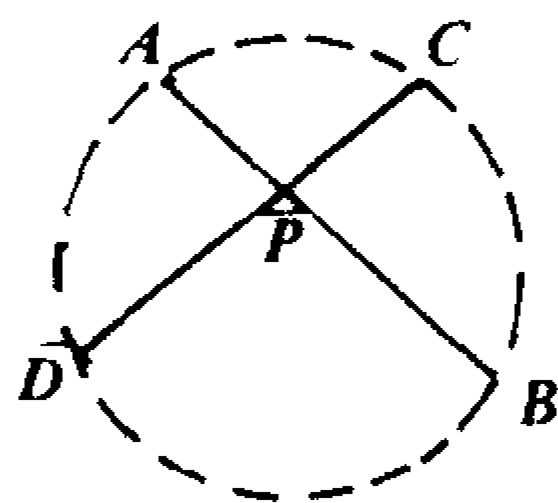
$$PA\cdot PB=PC\cdot PD=PE\cdot FP$$

$$=\begin{cases}(r-d)(r+d)=r^2-d^2=\left(\dfrac{MN}{2}\right)^2 & (P\text{ 在圆内时})\\ (d-r)(d+r)=d^2-r^2=PT^2 & (P\text{ 在圆外时})\end{cases}$$

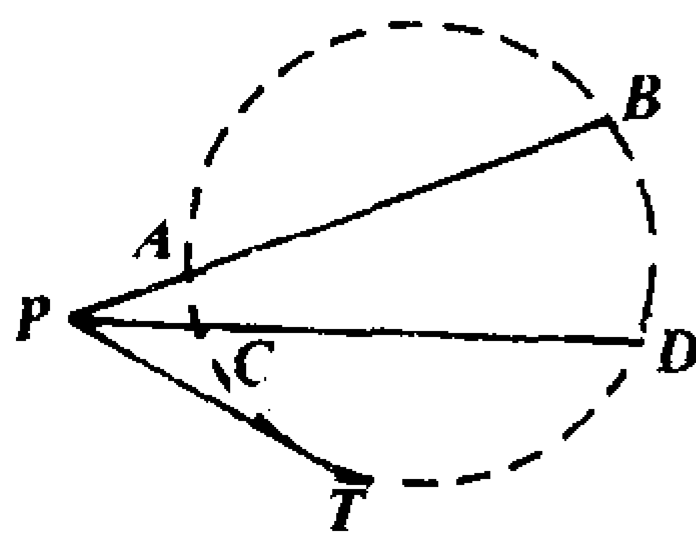
这即是我们提到的结论.

最后指出,圆幂定理的逆命题也是成立的,这是证四点共圆常用的依据.

圆幂定理的逆定理　若 AB、CD 相交于 P,且 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$,则 A、B、C、D 四点共圆.



(a)



(b)

图 13-3

特别地,如图 13-3(b) 当 C、D 两点重合为 T 时,则有

切割线定理的逆定理　若 AB、TP 交于 P,且 $PA\cdot PB=PT^2$,则 PT 切 $\triangle ABT$ 的外接圆于 T.

这两个定理的证明是很简单的,我们把它留给读者.

§ 13.3　定理的推广

1. 向圆锥曲线推广

把圆幂定理向圆锥曲线推广，可得

定理 13.1　设过点 P 的直线 AB、CD 分别与二次曲线 $ax^2+by^2=1$ 相交于 A、B、C、D(对双曲线，仅考虑它的一支)，AB 的倾角为 α，CD 的倾角为 β，QS、QT 分别为平行于 AB、CD 的切线，S、T 为切点，则

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{a\cos^2\beta+b\sin^2\beta}{a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha}=\frac{QS^2}{QT^2}.$$

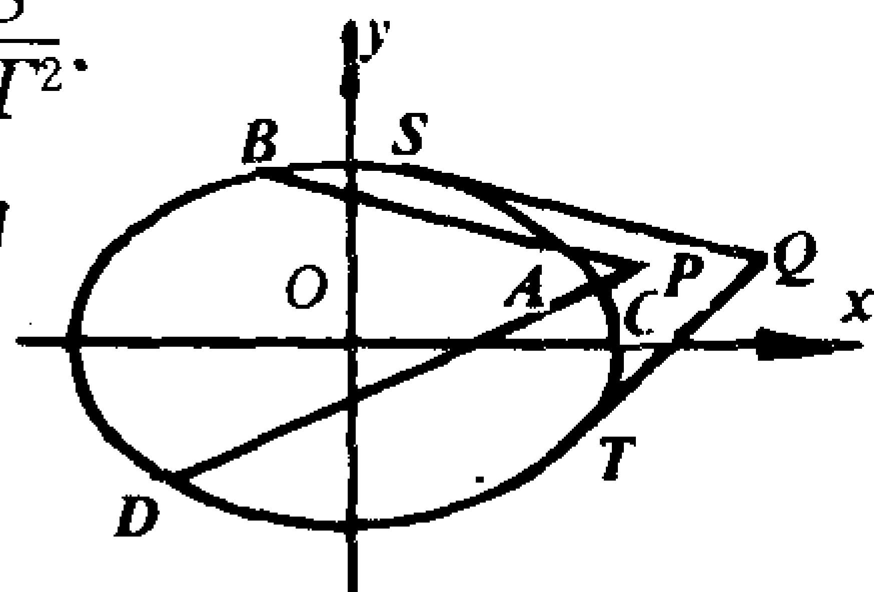


图 13-4

证明　如图 13-4. 设 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$$

代入 $ax^2+by^2=1$ 得

$$(a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha)t^2+(2ax_0\cos\alpha+2by_0\sin\alpha)t+ax_0^2+by_0^2-1=0$$

由 t 的几何意义有

$$PA\cdot PB=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1\cdot t_2|=\left|\frac{ax_0^2+by_0^2-1}{a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha}\right|$$

同理有　$$PC\cdot PD=\left|\frac{ax_0^2+by_0^2-1}{a\cos^2\beta+b\sin^2\beta}\right|$$

从而有　$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\left|\frac{a\cos^2\beta+b\sin^2\beta}{a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha}\right| \qquad ①$$

设 Q 的坐标为 (m,n)，则 QS 的参数方程为

$$\begin{cases}x=m+t\cos\alpha,\\ y=n+t\sin\alpha.\end{cases}$$

同上可得　$$QS^2=|t_1t_2|=\left|\frac{am^2+bn^2-1}{a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha}\right|,$$

$$QT^2=\left|\frac{am^2+bn^2-1}{a\cos^2\beta+b\sin^2\beta}\right|.$$

所以 $$\frac{QS^2}{QT^2}=\left|\frac{a\cos^2\beta+b\sin^2\beta}{a\cos^2\alpha+b\sin^2\alpha}\right| \qquad ②$$

结合 ①、②,定理得证.

显然,当 $a=b$ 时,$ax^2+by^2=1$ 为一个圆,有 $QS=QT$,从而 $\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=1$,为圆幂定理.

同理还可得

定理 13.2 设过点 P 的直线 AB、CD 分别交抛物线 $y^2=2px$ 于 A、B、C、D,AB 的倾角为 α,CD 的倾角为 β,QS、QT 分别为平行于 AB、CD 的切线,S、T 为切点,则

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{QS^2}{QT^2}.$$

更一般地,还有

定理 13.3 设过点 P 的直线 AB、CD 分别交圆锥曲线 $A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+Ey+F=0$($A_1$、$B_1$、$C_1$ 至少有一个不为零)于 A、B、C、D(对双曲线仅考虑一支),AB 的倾角为 α,CD 的倾角为 β,QS、QT 分别为平行于 AB、CD 的切线,S、T 为切点,则

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{A_1\cos^2\beta+B_1\cos\beta\cdot\sin\beta+C_1\sin^2\beta}{A_1\cos^2\alpha+B_1\cos\alpha\cdot\sin\alpha+C_1\sin^2\alpha}=\frac{QS^2}{QT^2}.$$

证明仿定理 13.1,略.

2. 向任意四边形推广

还可把圆幂定理向任意四边形推广,即有

定理 13.4 如图 13-5,设 A_1、A_2、A_3、A_4 是同一平面上三个不共线的任意四点,直线 A_1A_2、A_3A_4 相交于 P,记线段 $PA_i=a_i(i=1,2,3,4)$,三角形 $A_2A_3A_4$、$A_3A_4A_1$、$A_4A_1A_2$、$A_1A_2A_3$ 的外接圆半径分别为 R_1、R_2、R_3、R_4,则有

$$R_1R_2a_1a_2 = R_3R_4a_3a_4. \quad (*)$$

显然，当 A_1、A_2、A_3、A_4 四点共圆时，有

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4$，则 $\quad a_1a_2 = a_3a_4$，

即 $PA_1 \cdot PA_2 = PA_3 \cdot PA_4$. 这便是圆幂定理，所以定理 13.4 确系圆幂定理的一个推广.

证明 记线段 $A_iA_j = a_{ij}(i,j = 1,2,3,4)$，$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的面积分别表示为 S_1、S_2、S_3、S_4，又设 $\angle A_1PA_3 = \alpha$.

根据三角形面积、外接圆半径和三边的关系，有

$$R_1 = \frac{a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{24}}{4S_1}$$

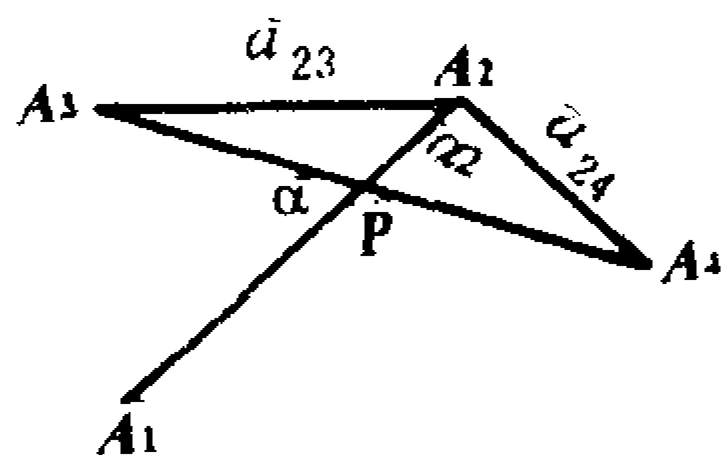


图 13-5

又如图 13-5 所示，

$$S_1 = \frac{1}{2}a_{34} \cdot a_2\sin\alpha.$$

所以 $R_1 = \dfrac{a_{23}a_{24}}{2a_2\sin\alpha}$，

同理 $\quad R_2 = \dfrac{a_{13}a_{14}}{2a_1\sin\alpha}$， $\qquad R_3 = \dfrac{a_{14}a_{24}}{2a_4\sin\alpha}$，

$$R_4 = \frac{a_{13}a_{23}}{2a_3\sin\alpha}.$$

$$\text{所以} R_1R_2 \cdot a_1a_2 = \frac{a_{23}a_{24}}{2a_2\sin\alpha} \cdot \frac{a_{13}a_{14}}{2a_1\sin\alpha} \cdot a_1a_2$$

$$= \frac{a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}}{4\sin^2\alpha},$$

同理 $\quad R_3R_4 \cdot a_3a_4 = \dfrac{a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}}{4\sin^2\alpha}$.

所以 $\quad R_1R_2a_1a_2 = R_3R_4a_3a_4$. 证毕.

§ 13.4 定理的应用

例 13.1 （射影定理）在直角三角形中，斜边上的高是两

直角边在斜边上射影的比例中项；每一直角边是它在斜边上的射影和斜边的比例中项.

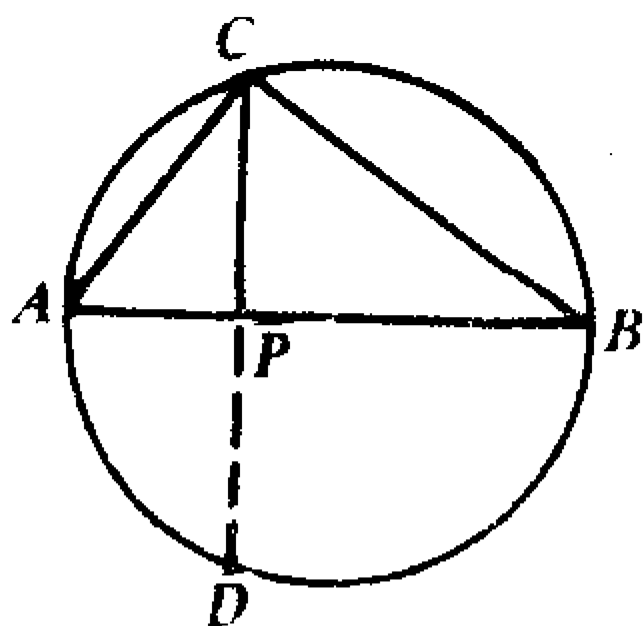


图 13-6

证明 如图 13-6，作 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆，CP 为斜边 AB 上的高，延长 CP 交外接圆于 D，则由相交弦定理，有

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD,$$

因为 $CP = PD$,

所以 $CP^2 = AP \cdot PB$.

又 $AC \perp BC$，$\triangle CPB$ 为直角三角形，BC 为 $\triangle CPB$ 外接圆直径，所以 AC 切圆 BPC 于 C，由切割线定理有

$$AC^2 = AP \cdot AB.$$

同理有 $BC^2 = BP \cdot BA$，从而命题得证.

例 13.2 如图 13-7. 已知两圆相交于点 M、N，点 C 为公共弦 MN 上任意一点，过 C 任意作一直线与两圆的交点顺次为 A、B、D、E，求证：

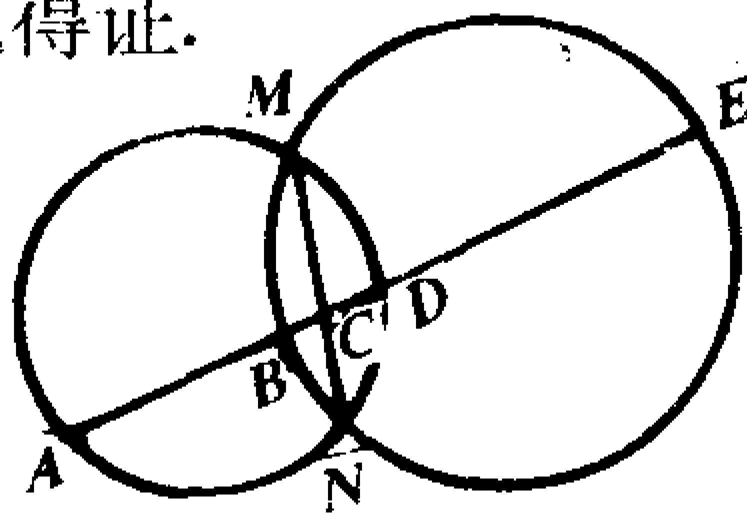


图 13-7

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC}.$$

证明 根据圆幂定理，有

$$AC \cdot DC = MC \cdot CN = BC \cdot CE,$$

所以 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CE}{DC} \Rightarrow$

$$\frac{AC - BC}{BC} = \frac{CE - CD}{DC}, \text{即} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{ED}{DC}.$$

例 13.3 如图 13-8，PA、PB 切 $\odot O$ 于 A、B，PO 交 $\odot O$ 于 N，交 AB 于 M，过 P 任作一条割线，交 $\odot O$ 于 C、D，则 $\angle DON = \angle DCM$.

证明　连OB，则$OB \perp PB$，又$AB \perp PM$，由例13.1有

$$PB^2 = PM \cdot PO,$$

又　$PB^2 = PC \cdot PD.$

所以　$PC \cdot PD = PM \cdot PO.$

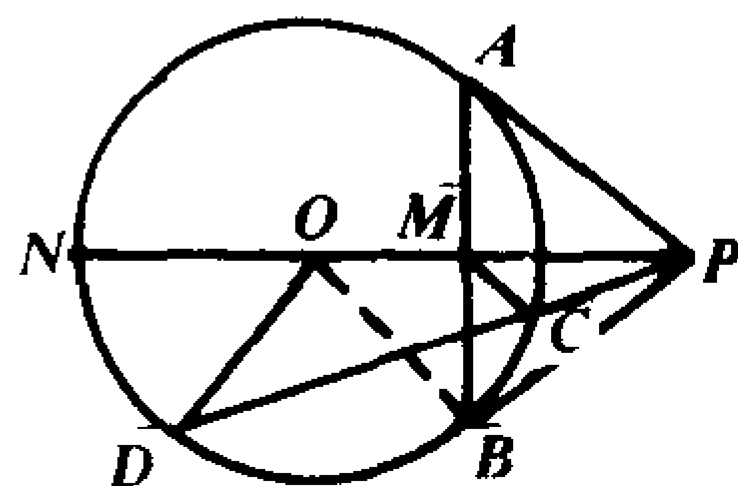


图 13-8

由圆幂定理的逆定理，O、M、C、D四点共圆，故有

$$\angle DON = \angle DCM.$$

例13.4　如图13-9，OA、OB为$\odot O$的两条半径，$BE \perp OA$于E，$EP \perp AB$于P，求证：$OP^2 + EP^2 = OB^2$.

证明　由例13·1有$PE^2 = PA \cdot PB$.

又P在$\odot O$内，由圆幂定理的统一形式，有

$$PA \cdot PB = OB^2 - OP^2,$$

所以　$EP^2 = OB^2 - OP^2,$

即　$OP^2 + EP^2 = OB^2.$

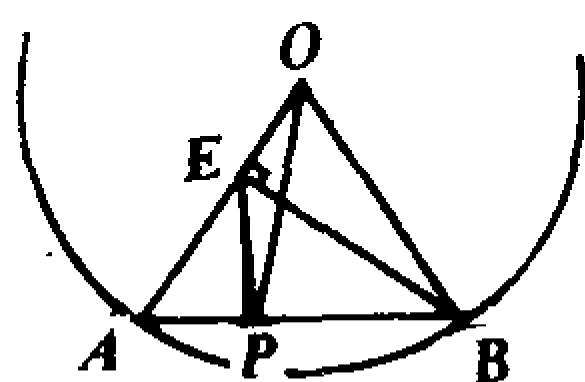


图 13-9

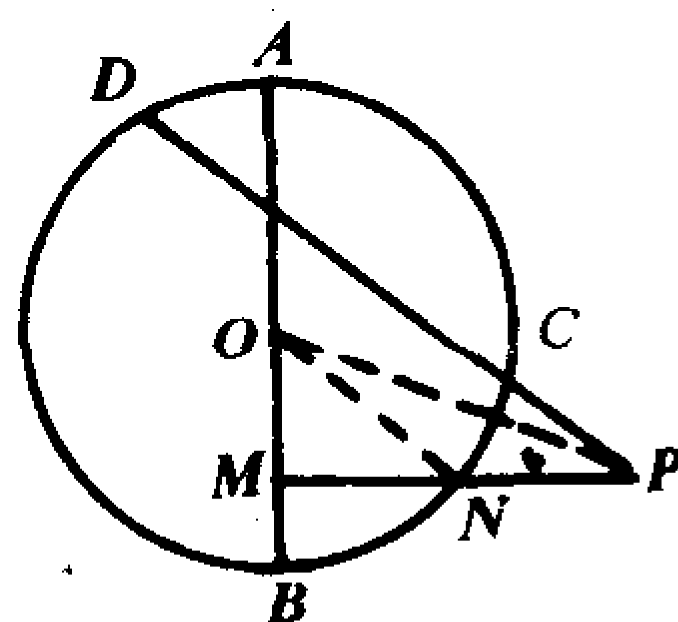


图 13-10

例13.5　如图13-10，从$\odot O$外一点P作直径AB的垂线，垂足为M，过P作割线交$\odot O$于C、D，求证：

$$PC \cdot PD + AM \cdot BM = PM^2.$$

证明　设MP交$\odot O$于N，连OP、ON，由圆幂定理的统一形式，有

$$PC \cdot PD = OP^2 - ON^2.$$

由于 AB 是 $\odot O$ 的直径，则 MN 为 Rt$\triangle ANB$ 斜边上的高，所以有

$$AM \cdot BM = MN^2 = ON^2 - OM^2.$$

故 $\quad PC \cdot PD + AM \cdot BM = (OP^2 - ON^2) + (ON^2 - OM^2)$

$$= OP^2 - OM^2 = PM^2. \quad \text{证毕.}$$

练习与思考

1. $\triangle ABC$ 的三条高 AD、BE、CF 相交于 H，求证：

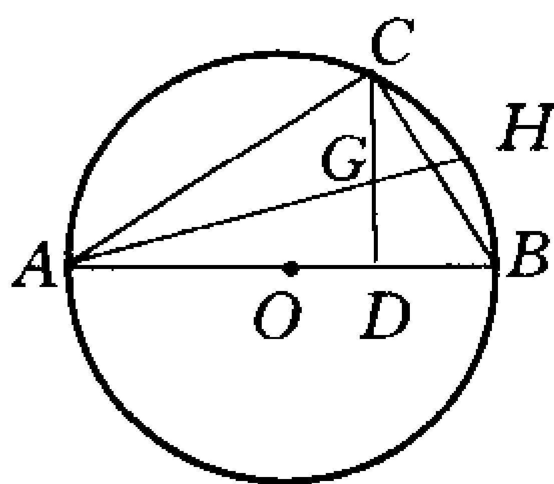
$$AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF.$$

2. Rt$\triangle ABC$ 中，直角顶点 C 到斜边 AB 的垂足为 D，G 为 CD 上一点，AG 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 H，求证：

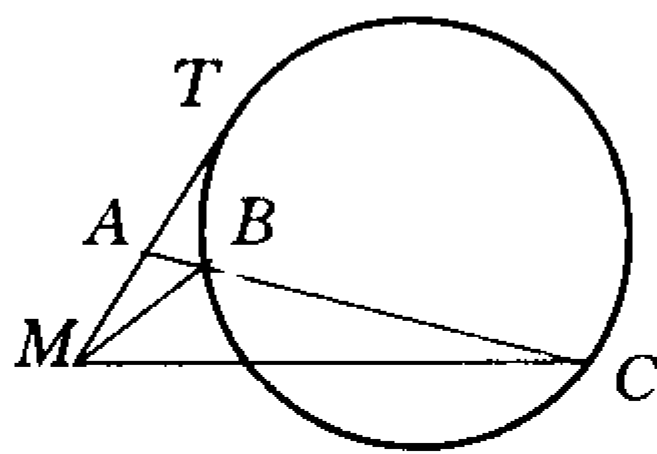
$$AG \cdot AH = AD \cdot AB$$

3. 条件同 1，求证：$BA \cdot BF + CA \cdot CE = EC^2$.

4. 从圆外一点 M，引圆的切线 MT（T 为切点），过 MT 的中点 A 引割线 ABC 交圆于 B、C 两点，求证：$\angle AMB = \angle MCA$.



（第2题）



（第4题）

第十四章　婆罗摩及多定理

§14.1　定　　理

婆罗摩及多定理对我们并不陌生，它以下面的形式出现在现行的课本里（见九年义务教育三年制课本《几何》第三册P210页第2题人教社94年版）：

婆罗摩及多定理　内接于圆的四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 垂直相交于点 K，过点 K 的直线与边 AD、BC 分别相交于点 H 和 M.

(1) 如果 $KH \perp AD$，那么 $CM = MB$；

(2) 如果 $CM = MB$，那么 $KH \perp AD$.

婆罗摩及多(Brahmagupta，又称梵藏，约598～660年)是印度卓越的数学家和天文学家. 在628年，他写了一部有二十一章的天文学著作《婆罗摩及多修订体系》，其中有专述算术、代数、几何的. 他的著作被认为是印度人在几何方面最为出色的. 他研究的主要问题是：根据所给的边和外接圆半径，求三角形面积；作三角形使它的边、外接圆半径和面积都是有理数；根据给定的四边形计算它的对角线、面积、高以及与四边形有关的某些另外的线段. 他也曾给出已知四边形的四边，求四边形面积的公式：

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

这里 a、b、c、d 为边，$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$. 但遗憾的是这一

公式只当四边形内接于圆时才成立(见第六章). 此外,婆罗摩及多还在 628 年左右正确地给出了负数的四则运算法则,在处理级数问题中,他也是印度数学家中最杰出的一位.

为简便起见,在下面的讨论中,我们把上述的婆罗摩及多定理,简称为婆氏定理.

§14.2 定理的证明

证明 1 如图 14-1 所示.

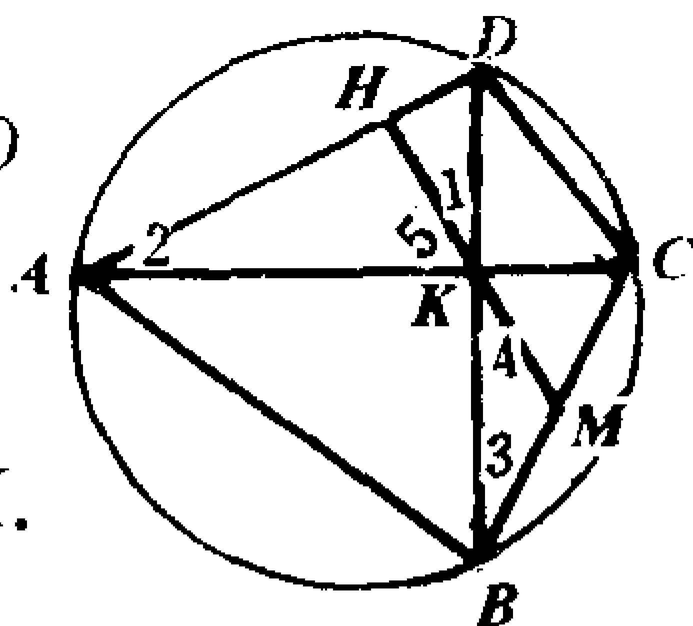


图 14-1

(1) 因为 $KH \perp AD, AC \perp BD$

所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$.

又 $\angle 2 = \angle 3$,

所以 $\angle 3 = \angle 4, MB = MK$.

同理 $MC = MK$,

所以 $BM = CM$.

(2) 所以 $CM = MB$,即 KM 为 Rt$\triangle BKC$ 斜边 BC 上的中线,因此有 $KM = MB, \angle 3 = \angle 4$,

又 $\angle 3 = \angle 2, \angle 4 = \angle 1$, ∴ $\angle 2 = \angle 1$.

而 $\angle 1 + \angle 5 = 90°$

所以 $\angle 2 + \angle 5 = 90°$, 即 $KH \perp AD$.

证明 2 (1) 如图 14-1,由定理 8.1.

$$\frac{BM}{MC} = \frac{KB\sin\angle 4}{KC\sin(90° - \angle 4)} = \frac{KB}{KC} \cdot \frac{\sin\angle 4}{\cos\angle 4} = \frac{KB}{KC} \cdot \mathrm{tg}\angle 4.$$

因为 $KH \perp AD$, ∴ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4$.

所以 $\mathrm{tg}\angle 4 = \mathrm{tg}\angle 2 = \dfrac{DK}{AK}$,

所以 $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{KB}{KC} \cdot \dfrac{DK}{KA} = 1$,故 $BM = MC$.

(2) 由 $BM = MC$,得

$$\frac{KB\sin\angle 4}{KC\cos\angle 4} = \frac{BM}{MC} = 1, \text{即 } \mathrm{tg}\angle 4 = \frac{KC}{KB}.$$

又 $\frac{KC}{KB}=\frac{KD}{KA}$， 所以 $\mathrm{tg}\angle 4=\frac{KD}{KA}$，

所以 $\angle 4=\angle 2$，又 $\angle 1=\angle 4$，

所以 $\angle 1=\angle 2$.

所以 $\angle 2+\angle 5=\angle 1+\angle 5=90°$，

故 $KH\perp AD$，婆氏定理得证.

接着我们指出，婆氏定理还有下面的

逆定理 若四边形的两对角线互相垂直，并且

(1) 过对角线交点向一边所作垂线平分其对边；

(2) 对角线交点与一边中点的连线垂直于对边；

(3) 对角线交点、交点在一边上的射影及对边中点三点共线.

这三条中只要一条成立，则四边形内接于圆.

下面仅给出(1)的证明，(2)、(3)的证明可类似得到.

证明 如图14-2所设，$KT\perp CD$，$KH\perp AD$，HK、TK分别交BC、AB于M、N，且M、N分别为BC、AB中点，则

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3,$$

$$\angle 5=\angle 6=\angle 7,$$

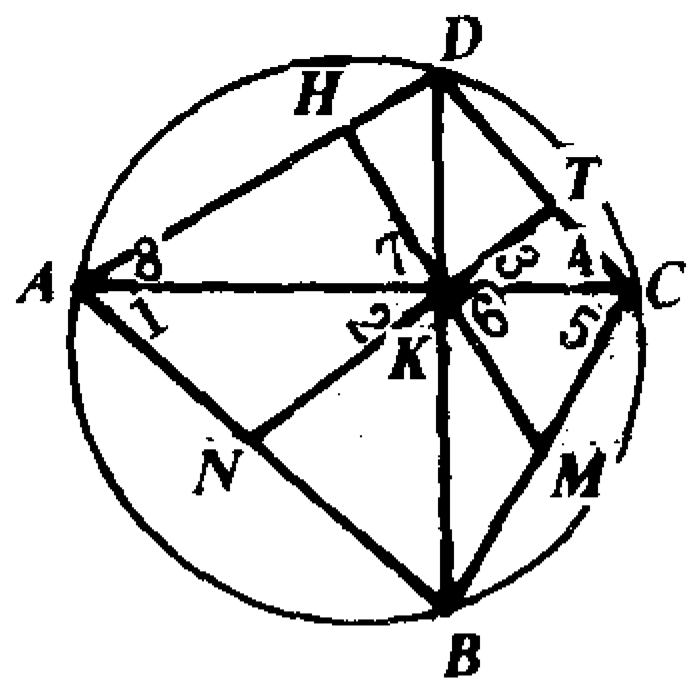


图 14-2

因为 $\angle 4+\angle 3=90°$，

$\angle 8+\angle 7=90°$，

所以 $\angle 4+\angle 1=90°$，

$\angle 8+\angle 5=90°$，

$\angle BAD+\angle DCB=180°$，从而 $ABCD$ 内接于圆.

§14.3 定理的推广

1. 对角线不垂直

定理14.1 (图14-3)$ABCD$为圆内接四边形，AC、BD交

于 K，$KH \perp AD$ 交 BC 于 M，则 $\frac{BM}{MC}=\frac{\sin 2\angle KCB}{\sin 2\angle KBC}$.

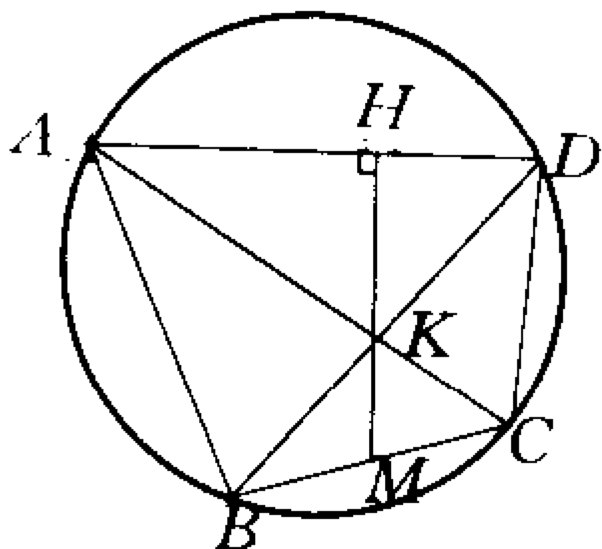


图 14-3

证明 由定理 8.1，有

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BK\sin\angle BKM}{KC\sin\angle MKC}$$

又 $\frac{BK}{KC}=\frac{\sin\angle KCB}{\sin\angle KBC}$，

$$\angle BKM=\angle HKD=90^\circ-\angle ADB=90^\circ-\angle KCB.$$

所以 $\sin\angle BKM=\cos\angle KCB$，同理 $\sin\angle MKC=\cos\angle KBC$.

故有

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BK}{KC}\cdot\frac{\sin\angle BKM}{\sin\angle MKC}=\frac{\sin\angle KCB}{\sin\angle KBC}\cdot\frac{\cos\angle KCB}{\cos\angle KBC}=\frac{\sin 2\angle KCB}{\sin 2\angle KBC}.$$

显然，当 $AC\perp BD$ 时，$2\angle KCB+2\angle KBC=180^\circ$，有 $\frac{BM}{MC}=1$，为婆氏定理.

2. 四边形不内接于圆

定理 14.2 （图 14-4）在四边形 $ABCD$ 中，$AD\perp BC$ 于 K，$KT\perp AB$ 于 T，交 DC 于 N，$KH\perp DC$ 于 H 交 AB 于 M，则 $\frac{DN}{NC}=\frac{AM}{MB}=\frac{KA\cdot KD}{KB\cdot KC}$.

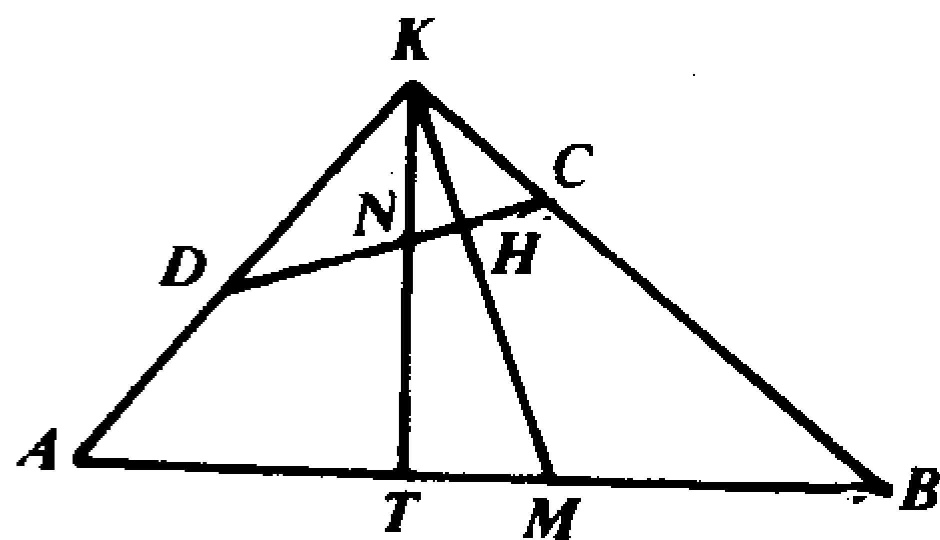


图 14-4

证明 因为 $\angle NKC=\angle MAK$

（均与 $\angle DKN$ 互余）

$\angle NCK=\angle AKM$

（均与 $\angle HKC$ 互余）

所以 $\triangle CKN\backsim\triangle KAM\Rightarrow\frac{CK}{AK}=\frac{KN}{AM}=\frac{NC}{KM}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = \dfrac{KN \cdot AK}{KC} \\ NC = \dfrac{KM \cdot CK}{KA} \end{cases} \quad ①$$

同理可证 $\triangle DNK \backsim \triangle KMB \Rightarrow \dfrac{DK}{KB} = \dfrac{KN}{MB} = \dfrac{DN}{KM}$

$$\Rightarrow \begin{cases} MB = \dfrac{KN \cdot KB}{DK} \\ ON = \dfrac{KM \cdot DK}{KB} \end{cases} \quad ②$$

由 ①、② 得$\dfrac{ON}{NC} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{KA \cdot KD}{KB \cdot KC}$.

若考虑凹四边形 $ABCD$，且当 A、C、D、B 共圆时有 $\dfrac{KA \cdot KD}{KB \cdot KC} = 1$ 得 $AM = MB$，此时即为婆氏定理.

3. 对角线交角为 α

定理 14.3 （图 14-5）圆内接四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC、BD 相交于 K，交角为 α，KH 与 AD 交于 H，且 $\angle KHD = \alpha$，HK 交 BC 于 M，则

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\sin(\alpha + \angle BCK)}{\sin\angle KBC}.$$

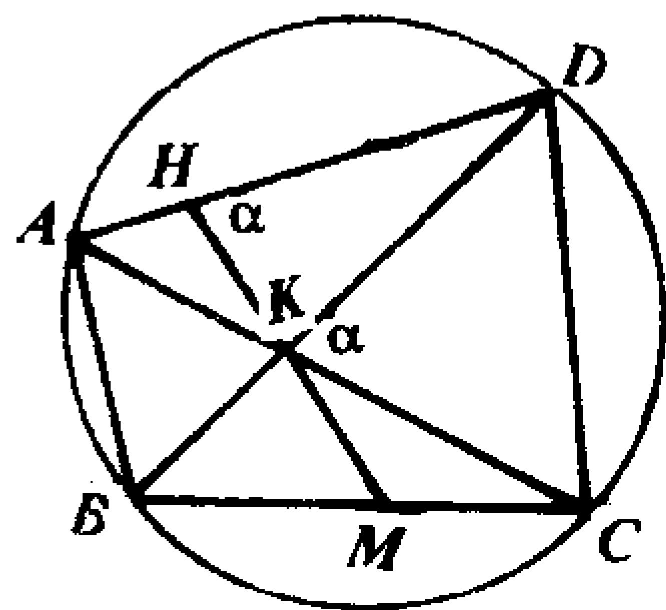


图 14-5

证明 因为 $\angle HAK = \angle KBC$，$\angle AHK = \angle BKC$（α 的补角），

所以 $\angle BCK = \angle AKH = \angle MKC \Rightarrow KM = MC$.

所以 $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BM}{MK} = \dfrac{\sin\angle BKM}{\sin\angle KBM} = \dfrac{\sin(\alpha + \angle KCB)}{\sin\angle KBC}$.

当 $\alpha = 90°$ 时，有$\dfrac{\sin(\alpha + \angle KCB)}{\sin\angle KBC} = 1$，得 $BM = MC$，即为婆氏定理.

定理 14.4 如图 14-6，E、F 分别为 $\odot O$ 的内接四边形

$ABCD$ 的对角线 BD、AC 的中点，分别过 E、F 作 $EK \perp AC$，$FK \perp BD$，两直线交于 K，$KH \perp AD$ 交 BC 于 M，则

$$BM = MC.$$

显然，当 $AC \perp BD$，K 为 AC、BD 的交点，婆氏定理为其特殊情形.

证明 延长 BK 至 T，使 $KT = BK$，连 AO 交 $\odot O$ 于 S，连 CT、CS、DS、DT、OE、OF，则

$DT \underline{\underline{\parallel}} 2EK$，$SC \underline{\underline{\parallel}} 2OF$，

所以 $OF \perp AC$，$EK \perp AC$，

所以 $OF \parallel EK$.

同理，$OE \parallel FK$，故 $OFKE$ 为平行四边形.

则 $OF \underline{\underline{\parallel}} EK$，从而 $SC \underline{\underline{\parallel}} DT$，$CT \parallel SD$.

又 AS 为直径，$DS \perp AD$，$KM \perp AD \Rightarrow KM \parallel DS \parallel CT$.

且 $BK = KT$，

所以 $BM = MC$.

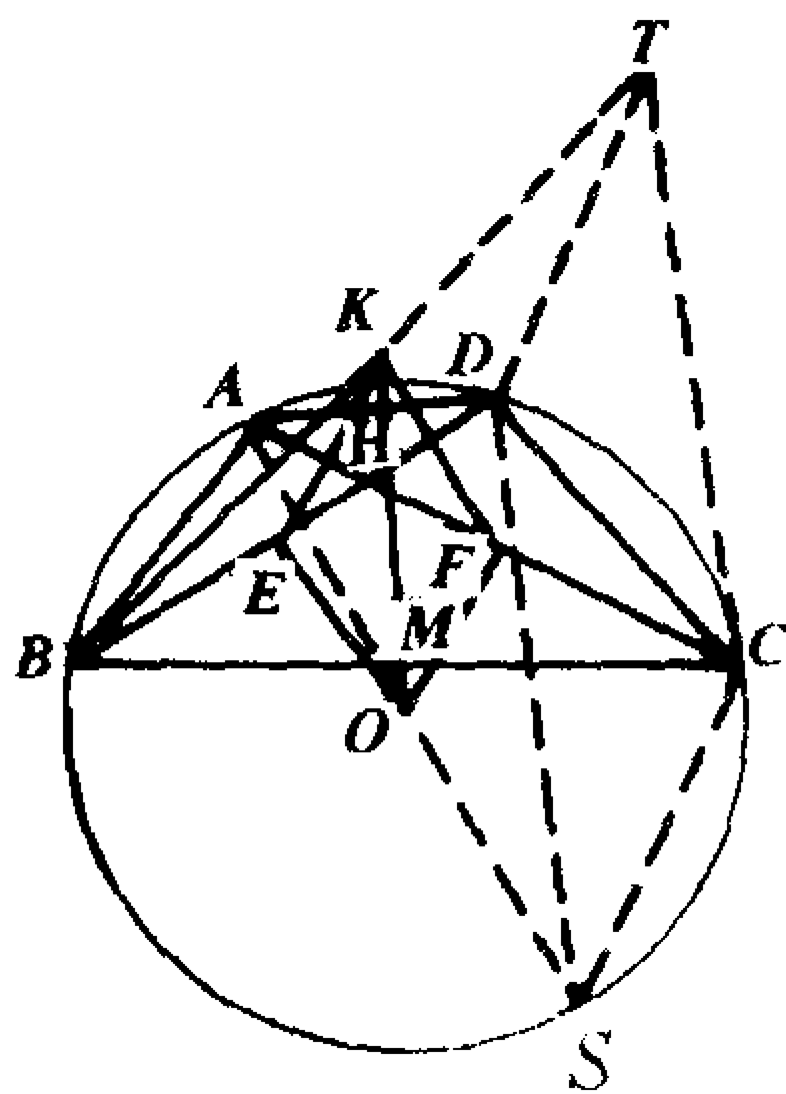


图 14-6

§14.4 定理的应用

例 14.1 $ABCD$ 为圆内接四边形，$AC \perp BD$ 于 K，过 K 向四边形作垂线，垂足分别为 H_1、H_2、H_3、H_4，四边中点分别为 G_1、G_2、G_3、G_4（图 14-7）. 则 H_1、H_2、H_3、H_4、G_1、G_2、G_3、G_4 八点共圆.

证明 因为 $G_1G_2 \underline{\underline{\parallel}} G_3G_4 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$，$G_1G_4 \underline{\underline{\parallel}} G_2G_3 \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD$，且有 $AC \perp BD$，故可推出四边形 $G_1G_2G_3G_4$ 为矩形，且 G_1G_3、G_2G_4 分别为其外接圆直径. 因为 $KH_1 \perp AB$，由婆氏定理 H_1K 必交 CD 于 G_3，故 H_1 在以 G_1G_3 为直径的圆上.

同理可证 H_2、H_3、H_4 均在矩形 $G_1G_2G_3G_4$ 的外接圆上.

例 14.2 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,$AC \perp BD$ 于 K,M 是 BC 中点,N 是 AD 中点(图 14-8),求证:$KM = ON$.

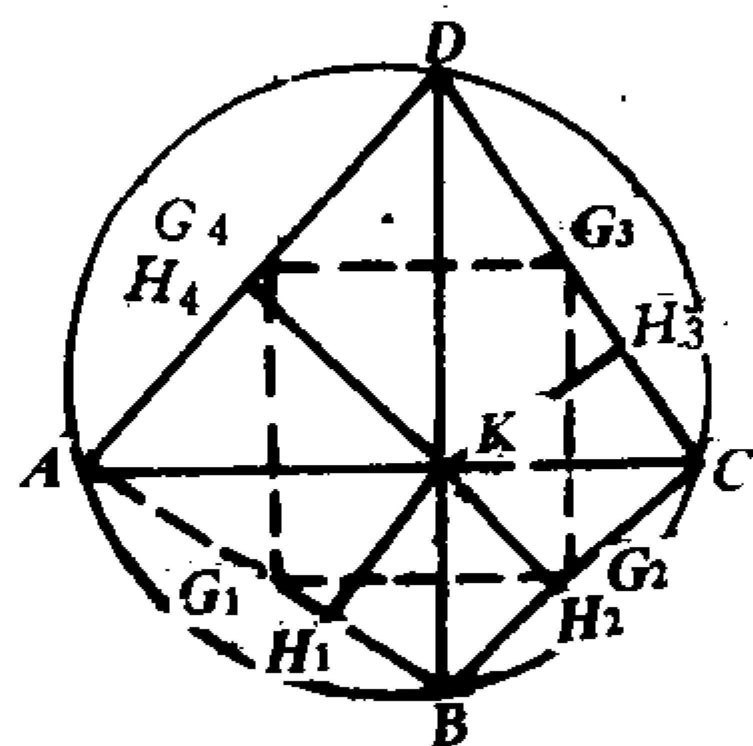


图 14-7

证明 因为 N 为 AD 中点

所以 $ON \perp AD$.

又 $AC \perp BD$,M 为 BC 中点,由婆氏定理有 $MK \perp ND$,

所以 $MK \parallel ON$,同理有 $NK \parallel OM$,从而得 $\square OMKN$,所以 $ON = KM$.

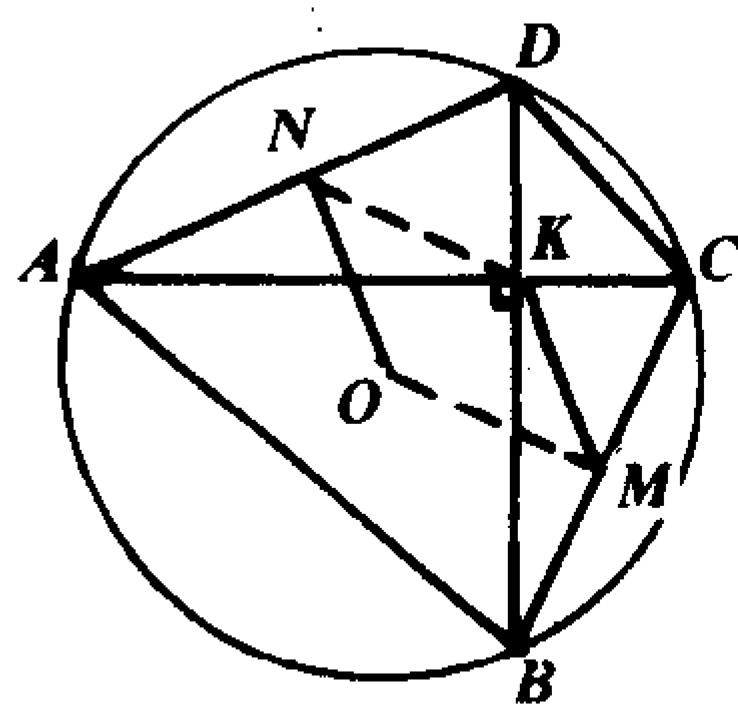


图 14-8

例 14.3 以直角三角形 ABC 的两直角边 AB、AC 为边向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$,AH 为 BC 上的高,延长 HA 交 EG 于 M,求证:$EM = MG$.

证明 如图 14-9. 连 BE、CG,则有 $\angle EBG = \angle ECG = 45°$ 所以 B、C、G、E 四点共圆. EC、BG 为互相垂直的两条弦,又 $AH \perp BC$,由婆氏定理有 $EM = MG$.

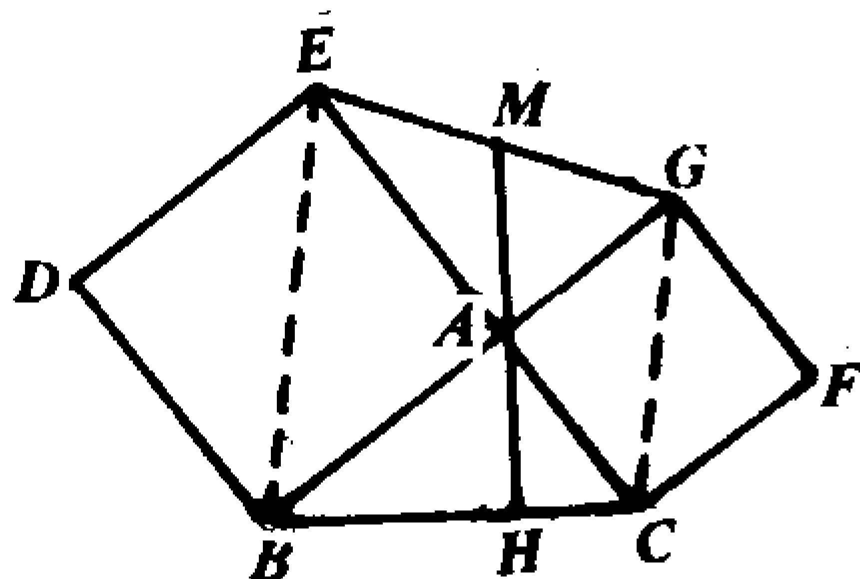


图 14-9

第十五章 九 点 圆

§15.1 定 理

九点圆定理 任意三角形三条高的垂足、三边的中点，以及垂心与顶点的三条连线的中点，这九点共圆.

这个圆通常称为三角形的九点圆，也有人叫费尔巴哈(Feuerhach，1800～1834年)圆，或欧拉圆. 关于这个定理，可追溯到1765年，欧拉在一篇文章中证明的"垂足三角形和中点三角形有同一个外接圆(六点圆)." 因此就有人误认为上述定理应归功于欧拉.

其实，第一个完整的证明是彭赛列(Poncelet，1788～1867年)于1821所发表的. 1822年，一位高中教师费尔巴哈也发现了九点圆，并且还指出，九点圆与三角形的内切圆及三个旁切圆都相切(见定理15.3). 所以在德国把它称为费尔巴哈圆，并把九点圆与内切圆及旁切圆的四个接触点称做三角形的费尔巴哈点，人们曾十分重视这一研究.

§15.2 定理的证明

九点圆定理的证法很多，如可任取其中三点作圆，再证余下六点在所作圆上. 从九点中任取三点就有 $C_9^3 = 84$ 种取法，再按任意次序证其余六点与前三点共圆，有人计算过共有94832640000种方法，这里仅介绍两种简洁且有代表性的证法.

证法 1　如图 15-1，AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的高，垂心为 H，N、S、P 分别为三边中点，G、T、M 分别为 AH、BH、CH 中点.

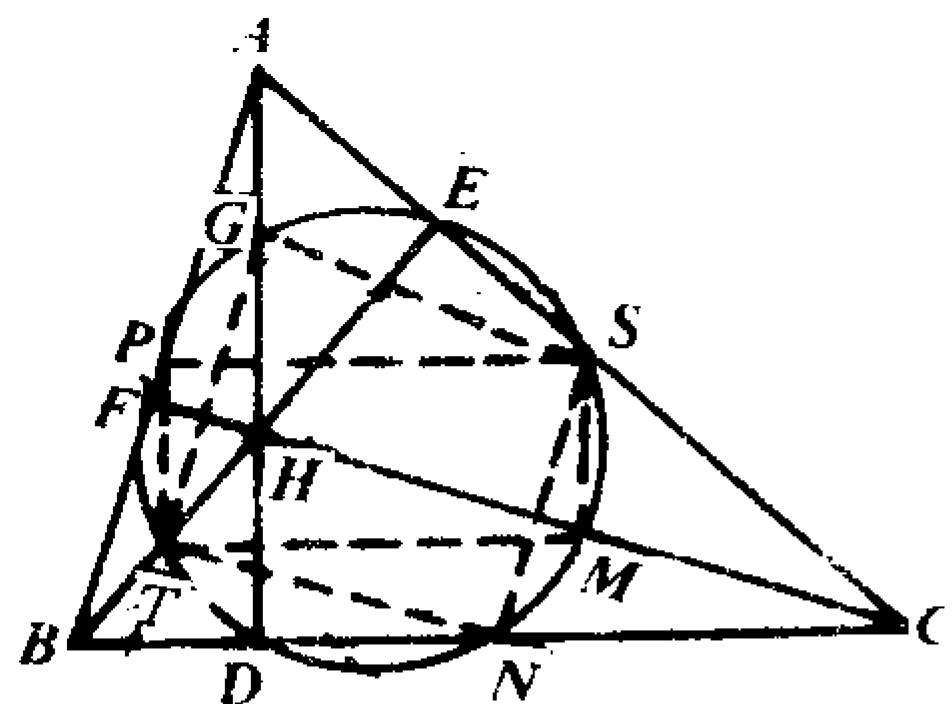


图 15-1

因为　$PS \mathrel{\underline{\parallel}} TM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC$.

$PT \mathrel{\underline{\parallel}} SM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AH$，

又　$AD \perp BC$，

所以　$PTMS$ 为矩形.

同理 $TNSG$ 也为矩形，故 TS、NG、PM 是同一个圆的三条直径.

又 $\angle GDN = 90^\circ$，　所以　D 在此圆上，

同理 E、F 也在此圆上.

故 D、E、F、G、T、M、N、S、P 九点共圆.

在给出证法 2 之前，我们先介绍一个引理(即八点圆定理) 这个引理是 1944 年布兰德(Brand) 提出来的. 但早在 1924 年，纽约的施马尔(Schmall) 叙述过它的一个重要特例，由这个特列，可给出九点圆定理的一个别证. 证法不是最简的，但却是意味深长的.

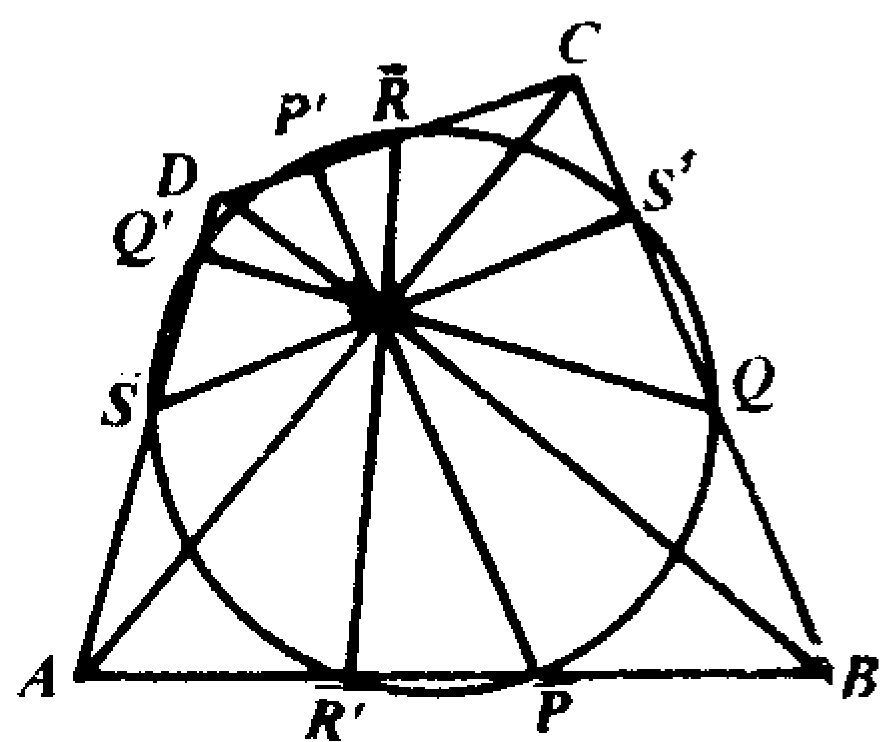


图 15-2

引理　(图 15-2) 如果四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直，P、Q、R、S 是各边中点，PP'、QQ'、RR'、SS' 分别垂直于对边，P'、Q'、R'、S' 为垂足，则 P、Q、R、S、P'、Q'、R'、S' 这八点共圆.

证明　因为　$AC \perp BD$，P、Q、R、S 为各边中点，同前证法 1，则四边形 $PQRS$ 为矩形，以其对角线为直径作矩形 $PQRS$ 的外

接圆O,因为$\angle PP'R=\angle QQ'S=\angle RR'P=\angle SS'Q=90°$,且都是直径上的圆周角,所以点$P'$、$Q'$、$R'$、$S'$都在圆$O$上,即$P$、$Q$、$R$、$S$、$P'$、$Q'$、$R'$、$S'$八点共圆.

(其实图15-2中六线共点)

证法2 如图15-1,在四边形$ABCH$中,因为对角线$BH\perp AC$,所以点P、N、M、G、F、D六点(垂足F、D重复两次)共圆.同理,在四边形$ABHC$中,有P、T、M、S、F、E六点(垂足F、E重复两次)共圆.

这两个圆都过P、M、F三点,所以是同一个圆,从而九点P、N、S、F、D、E、G、T、M共圆.

§15.3 定理的引伸

首先我们有

定理15.1 $\triangle ABC$的三个旁心所构成的$\triangle I_aI_bI_c$的九点圆为$\triangle ABC$的外接图.

证明 只证$\triangle I_aI_bI_c$的垂足三角形是$\triangle ABC$,即得结论.

如图15-3,根据旁心的定义知I_aA平分$\angle BAC$,I_bA平分$\angle CAE$,I_CA平分$\angle BAF$.

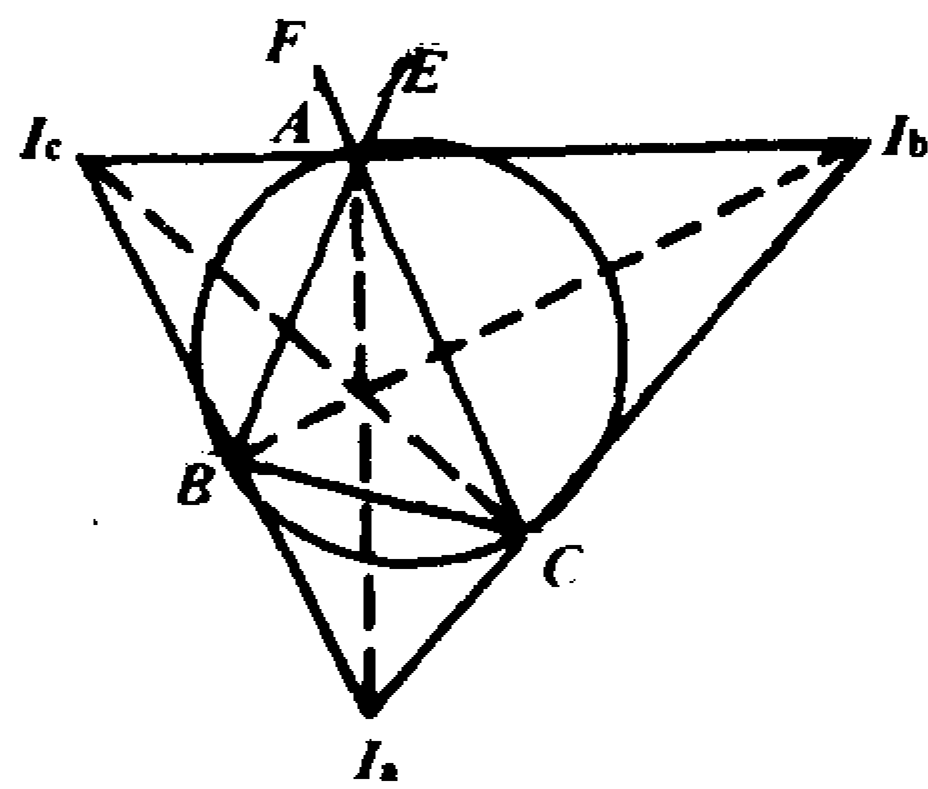


图15-3

又因为$\angle BAF=\angle CAE$,从而有I_b、A、I_c三点共线,且$I_aA\perp I_bI_c$.

同理$I_bB\perp I_aI_c$,$I_cC\perp I_aI_b$,故$\triangle ABC$为$\triangle I_aI_bI_c$的垂足三角形,所以$\triangle ABC$的外接圆,即$\triangle I_aI_bI_c$的九点圆.

通过下面的定理15.2,我们将看到,九点圆中的九个点确是无数个中点中的九个特殊的点.

定理 15.2　$\triangle ABC$ 的垂心 H 与外接圆 O 上任意点连线的中点共圆，这圆就是 $\triangle ABC$ 的九点圆. 或三角形的垂心与外接圆上点的连线被其九点圆平分.

证明　如图 15-4，过垂心 H 作 $\odot O$ 的两弦 DE、FG，M、N、S、T 分别为 HD、HE、HF、HG 的中点，则

$\angle FDH = \angle SMH$,

$\angle EGH = \angle NTH$.

又 $\angle FDH = \angle EGH$,

所以 $\angle SMH = \angle NTH$,

故 M、S、T、N 四点共圆，由 DE、FG 的任意性，得 H 与 $\odot O$ 上任意点连线的中点在同一圆上. 由于这个圆过 HA、HB、HC 的中点，故这个圆就是三角形的九点圆.

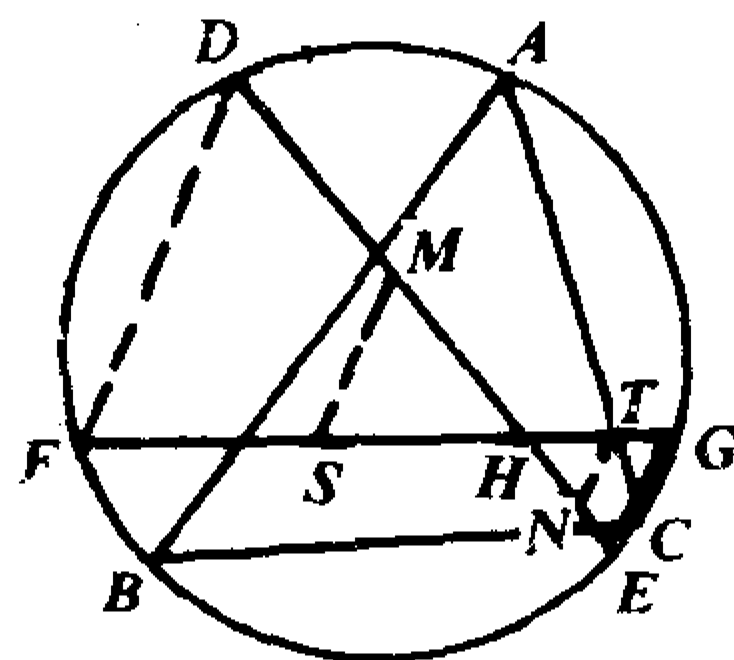


图 15-4

定理 15.3　(费尔巴哈定理) 三角形的九点圆与内切圆内切且与三个旁切圆外切.

证明　如图 15-5 所设，内切圆 I 切 $\triangle ABC$ 三边于 P、M、R；N、V 为 BC、AB 中点.

连 AI 并延长交 BC 于 F，过 F 作 FC' (异于 FP) 切 $\odot I$ 于 S，交 AB 于 C'，则 $\triangle AFC' \cong \triangle AFC$，$AC' = AC$，$C'C \perp AF$.

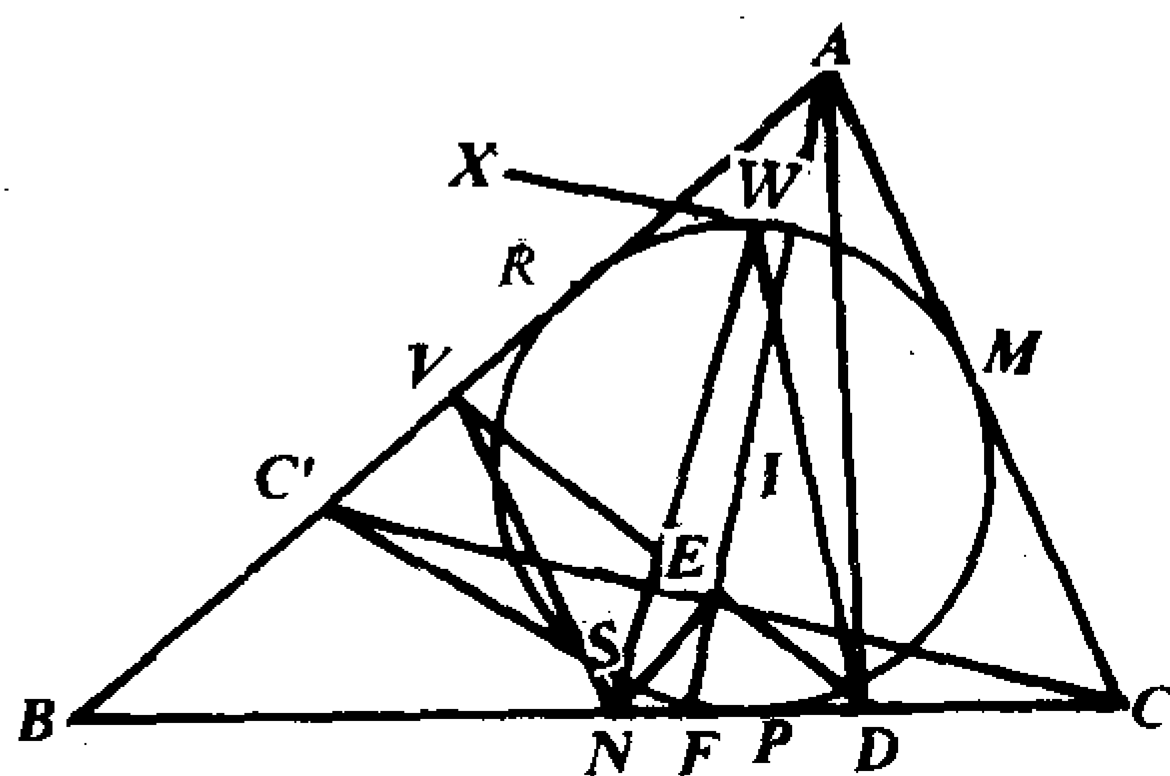


图 15-5

设 AF、$C'C$ 交于 E，则 E 为 CC' 中点，连 NE，则

$$EN = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}(AB - AC)$$

$$= \frac{1}{2}[(AR + BR - (AM + MC)]$$

$$= \frac{1}{2}(BP - PC)$$

(因为 $AR = AM$, $BR = BP$, $CM = CP$)

$$= \frac{1}{2}[(BN + NP - (NC - NP)]$$

(因为 $BN = NC$)

$$= NP.$$

又 $\angle AEC = \angle ADC = 90°$,

所以 A、E、D、C 四点共圆. 且 $NE \parallel AB$,

所以 $\angle 4 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, 从而 $\triangle NEF \backsim \triangle NDE$,

所以 $NF \cdot ND = NE^2 = NP^2$.

连 NS 交 $\odot I$ 于另一点 W, 又有

$NP^2 = NS \cdot NW$.

故有 $NF \cdot ND = NS \cdot NW$.

从而 F、D、W、S 共圆.

所以 $\angle DWN = \angle BFC' = \angle AC'F - \angle B$

$= ACB - \angle B$.

又 $VN \parallel AC$, V 是 Rt$\triangle ADB$ 斜边 AB 的中点, 故有

$\angle NVD = \angle VNB - \angle VDN = \angle ACB - \angle B$.

所以 $\angle NWD = \angle NVD$, 故 W、V、N、D 共圆, 即 W 在九点圆 VND 上.

下面证明九点圆与 $\odot I$ 切于 W.

过点 W 作 $\odot I$ 的切线 WX, 使 WX 与 SC' 在 SW 同侧, 则 $\angle XWS = \angle C'SW = \angle NDW$. 则 WX 与过 D、N、W 三点的圆相切. 即 WX 与九点圆相切.

同理可证，九点圆与旁切圆也相切.

定理 15.4 圆周上任意四点，过其中任意三点作三角形，则这四个三角形的九点圆的圆心共圆.

这一定理被称为库利奇-大上定理，由库利奇、大上茂乔分别于 1910 年和 1916 年发表的. 上述四个圆心所在的圆还被称为四边形的九点圆.

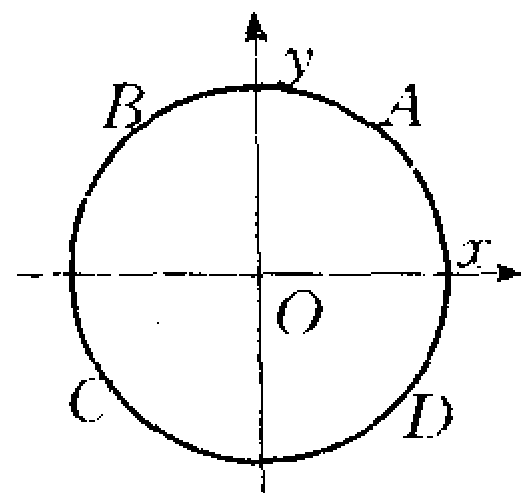


图 15-6

证明 如图 15-6，设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$ 是单位圆周上任意四点，则：$x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$，由九点圆圆心是外心与垂心连线的中点得 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 九点圆圆心坐标分别为

$$O_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{2},\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right),$$

$$O_2\left(\frac{x_1+x_2+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_4}{2}\right),$$

$$O_3\left(\frac{x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_2+y_3+y_4}{2}\right),$$

$$O_4\left(\frac{x_1+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_3+y_4}{2}\right).$$

考虑点 $O'\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}\right)$，则

$$|O_1O'|=\left[\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2}-\frac{x_1+x_2+x_3}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2+y_3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_4^2+y_4^2}=\frac{1}{2}.$$

同理可证 $|O_2O'|=|O_3O'|=|O_4O'|=\frac{1}{2}$.

故 O_1、O_2、O_3、O_4 在以 O' 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径的圆上. 即四边形 $ABCD$ 的四个三角形的九点圆圆心共 $\odot O'$.

对圆上五点的情形，过任意四点作四边形，则这五个四边形的"九点圆"圆心在同一圆上，这个圆被称为五边形的"九点圆".

依此类推，定理可无限推广下去，其解析证明可如法炮制.

练习与思考

1. 如图 15-1，证明点 G、T、M 分别平分弧 EP、FD、NS.

2. 试证九点圆圆心在三角形的欧拉线上，并且它到垂心和外心等远，九点圆的半径等于原三角形外接圆半径的一半.

3. 设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，P 是 $\triangle ABC$ 外接圆上任意一点，连 PG 并延长至 Q，使 $GQ=\frac{1}{2}PG$. 求证：Q 点在 $\triangle ABC$ 的九点圆上.

4. $\triangle ABC$ 为不等边三角形，$\angle A$ 对边的中垂线与 $\angle A$ 的内、外角平分线分别相交于 A_1、A_2，$\angle B$ 对边的中垂线与 $\angle B$ 的内、外角平分线相交于 B_1、B_2；$\angle C$ 对边的中垂线与 $\angle C$ 的内、外角平分线相交于 C_1、C_2，求证 A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2、A、B、C 九点共圆，且有 $A_1,A_2=B_1B_2=C_1C_2=2R$（R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径）.

第十六章　维维安尼定理

§16.1　定　　理

维维安尼定理　等边三角形内任一点到三边的距离之和等于定值(三角形的高).

维维安尼(Viviani,1622～1703年)是著名物理学家伽利略的弟子,他是意大利物理学家、数学家,确定旋轮线是他的几何成就.他所发现的上述定理与我国现行教材上大家熟知的一个命题有密切的联系,这个命题是

命题　等腰三角形底边上任一点到两腰的距离之和等于一腰上的高;等腰三角形底边延长线上任一点到两腰距离之差的绝对值等于一腰上的高.

(此命题的证明就不必赘述了.)

关于维维安尼定理,还有一段趣事.美国著名几何学家匹多(D. Pedoe)描述过:有一次一位经济学家打电话询问他,说维维安尼定理在经济学上有重要的意义,但不知这一定理是如何证明的,特向匹多请教.

其实这个定理的证明是很简单的.

现在我们来证明这个定理.

§16.2　定理的证明

此定理的证法很多,这里仅给出两种纯几何证法.

证法 1　如图 16-1,P 为 $\triangle ABC$ 内任一点,过 P 作

$ST \parallel BC$，交 AB 于 S，交 AC 于 T，由前面的命题，有

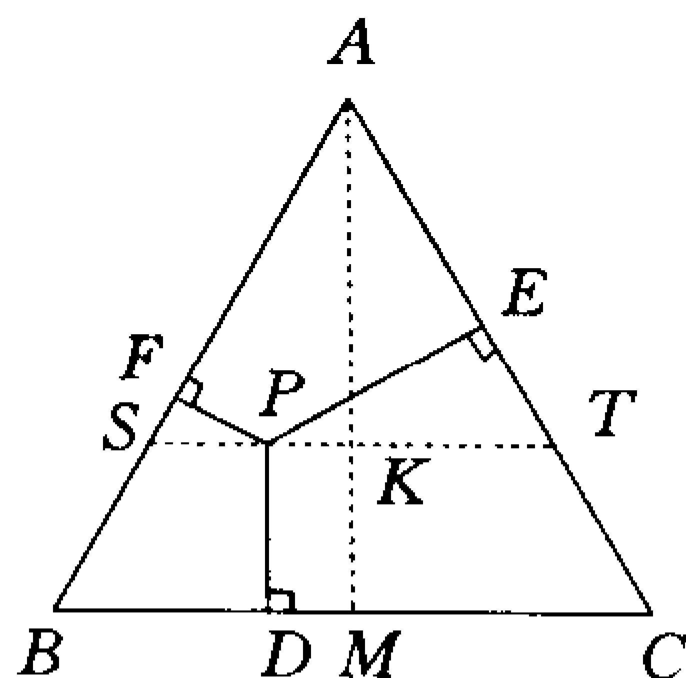


图 16-1

$$PF + PE = AK,$$

又 $KM = PD$，

所以 $$PD + PF + PE = AK + KM = AM = h$$

（定值，$\triangle ABC$ 的高）

证法 2 设正三角形边长为 a，高为 h，则

$$S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCA} = S_{\triangle ABC},$$

即 $\frac{1}{2}a \cdot PF + \frac{1}{2}a \cdot PD + \frac{1}{2}a \cdot PE = \frac{1}{2}a \cdot h$，

故 $PF + PD + PE = h$.

这里采用的是面积证法.

§16.3 定理的引伸与推广

1. 对点 P 推广

定理 16.1 若点 P 为等边三角形所在平面上任意一点，则由 P 向各边所在直线所引垂直有向线段之和等于一定值（三角形的高）. 当从点 P 所引垂直线段与三角形在其直线同侧时，取正号；异侧时取负号.

当点在三角形外时，有两种情形，如图 16-2.

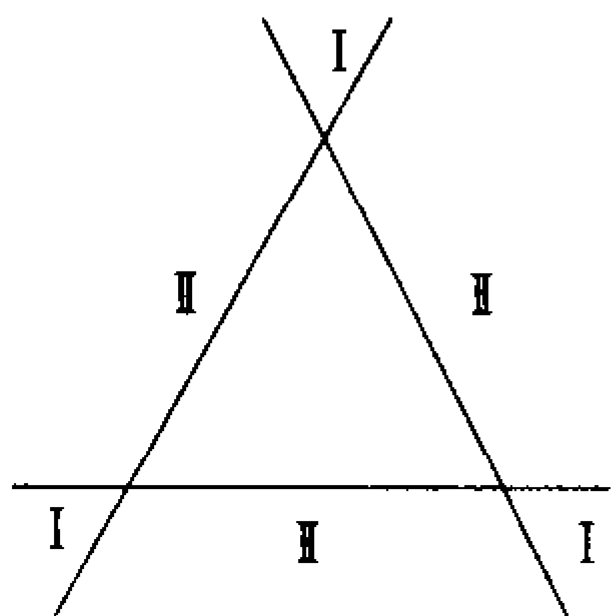


图 16-2

证明 (1) 当点 P 在区域 Ⅰ 内，如图 16-3，这时即要证

$$PD - PE - PF$$

为定值. 过 P 作 $MN \parallel BC$ 交 BA、CA 延长线于 N、M，过点 A 作 $GH \perp BC$，交 MN 于 G、BC 于 H，则

$$PE + PF = AG, \qquad PD = GH,$$

所以 $PD - PE - PF = GH - AG = AH = h.$

(2) 当点 P 在区域 Ⅱ 内,如图16-4,这时即要证 $PE + PF - PD$ 为定值.

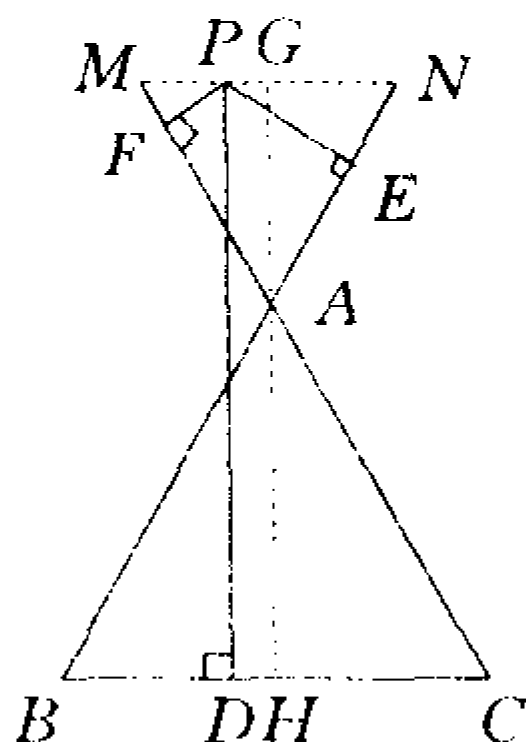


图 16-3

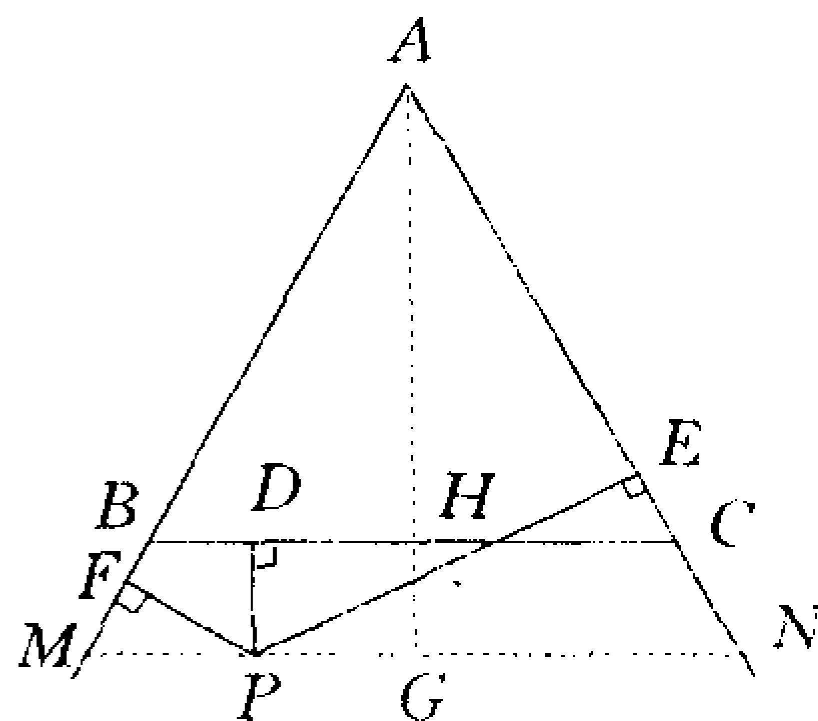


图 16-4

过点 P 作 $MN \parallel BC$,分别交 AB、AC 于 M、N,过点 A 作 $AH \perp BC$,交 BC 于 H、MN 于 G,则 $\triangle AMN$ 为等边三角形,$PE + PF = AG$.

从而 $PE + PF - PD = AG - GH = AH = h.$

与点 P 在三角形内时结论一致,命题得证.

2. 将正三角形向任意三角形推广

定理 16.2 三角形内任意一点到三边的距离与相应边对角的正弦乘积的和是一个定值,这定值是三角形面积同外接圆半径之比.

证明 如图 16-5 所设,

因为 $\frac{1}{2}a \cdot PD + \frac{1}{2}b \cdot PE + \frac{1}{2}c \cdot PF = S$,

由正弦定理有 $a = 2R \cdot \sin A$, $b = 2R \cdot \sin B$, $c = 2R \cdot \sin C$. 代入上式,化简得

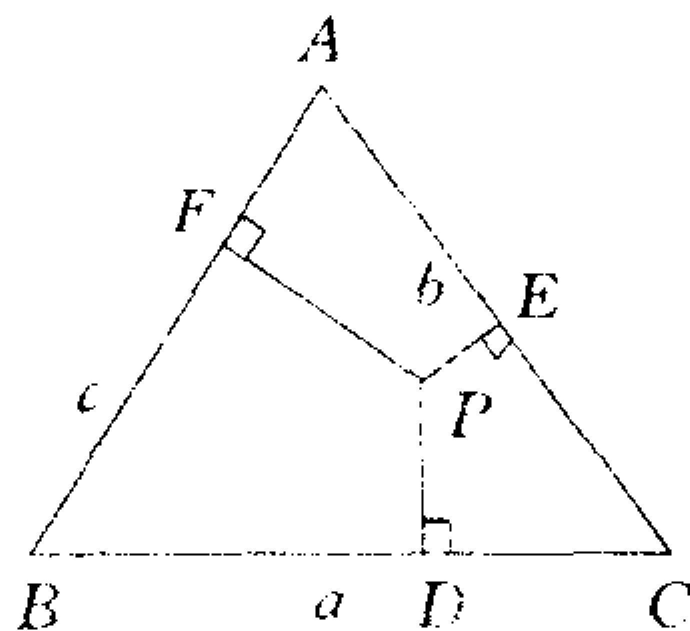


图 16-5

$PD \cdot \sin A + PE \cdot \sin B + PF \cdot \sin C = \frac{S}{R}$，证毕.

类似于定理 16.1，引入有向线段的概念，也可把点推广到三角形外，但由于叙述上的繁琐，我们把它略去，下面的讨论也是如此.

3. 把正三角形向正 n 边形推广

定理 16.3 正 n 边形内一点到各边的距离之和为一定值.

证明 如图 16-6，设正 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 内任一点 P 到各边的距离依次为 h_1、h_2、$\cdots$、h_n，正 n 边形面积为 S，边长为 a，连 PA_1、PA_2、$\cdots$、PA_n，

则 $$S_{\triangle PA_1A_2} + S_{\triangle PA_2A_3} + \cdots + S_{\triangle PA_nA_1} = S.$$

即 $$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \cdots + \frac{1}{2}ah_n = S.$$

所以 $$h_1 + h_2 + \cdots + h_n = \frac{2S}{a}\text{（定值）}$$，证毕.

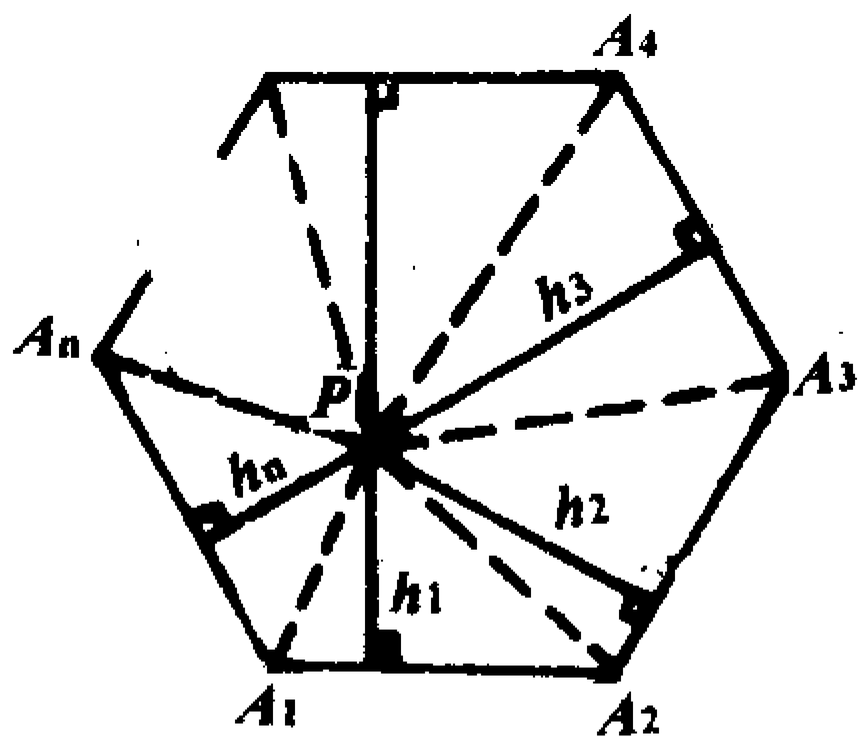


图 16-6

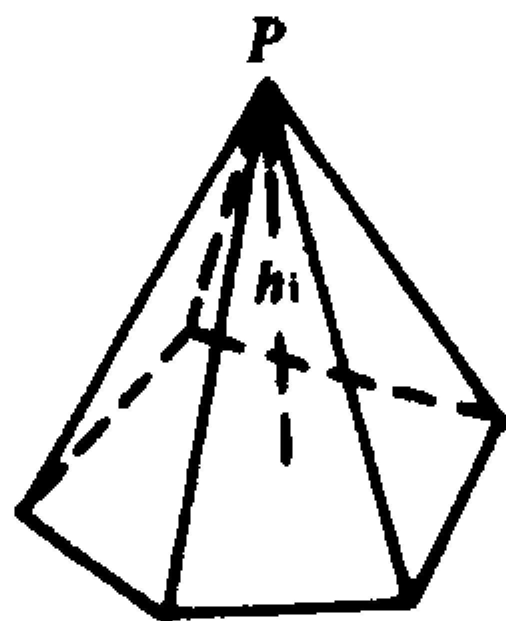


图 16-7

4. 向三维空间推广

定理 16.4 正多面体内任一点到各面的距离之和为一定值.

证明 设正多面体内任一点 P 到各面的距离分别为 h_1、

h_2、…、h_n(n 为面数,n 可取 4,6,8,12 和 20) 各面面积为 S,正多面体体积为 V,将 P 与正多面体各顶点相连结,则此正多面体可分成以 P 为公共顶点,正多面体各面为底面的 n 个棱锥(如图 16-7).

因此有 $$\frac{1}{3}S\cdot h_1+\frac{1}{3}S\cdot h_2+\cdots+\frac{1}{3}S\cdot h_n=V,$$

所以 $$h_1+h_2+\cdots+h_n=\frac{3V}{S}(\text{定值}).$$

上述定理都是用剖分的方法证明,其中起决定作用的是"边"相等,"面"相等,因此我们不难对定理作进一步的推广和引伸.

5. 引伸

定理 16.5 等边凸多边形内任一点到各边的距离之和为定值.

定理 16.6 若一个凸多面体各面面积相等,则此凸多面体内任一点到各面的距离之和为定值.

证明同定理 16.3、16.4.

值得注意的是,如果把定理 16.5 中的边数限制为 3,定理 16.6 中的面数限制为 4,则它们都存在逆定理.即有

定理 16.7 若三角形内任一点到各边距离之和为定值,则该三角形为正三角形.

为了证明定理 16.7,首先我们有

引理 1 若 $\triangle ABC$ 的 BC 边上任一点到 AB、AC 两边距离之和为定值,则 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形.

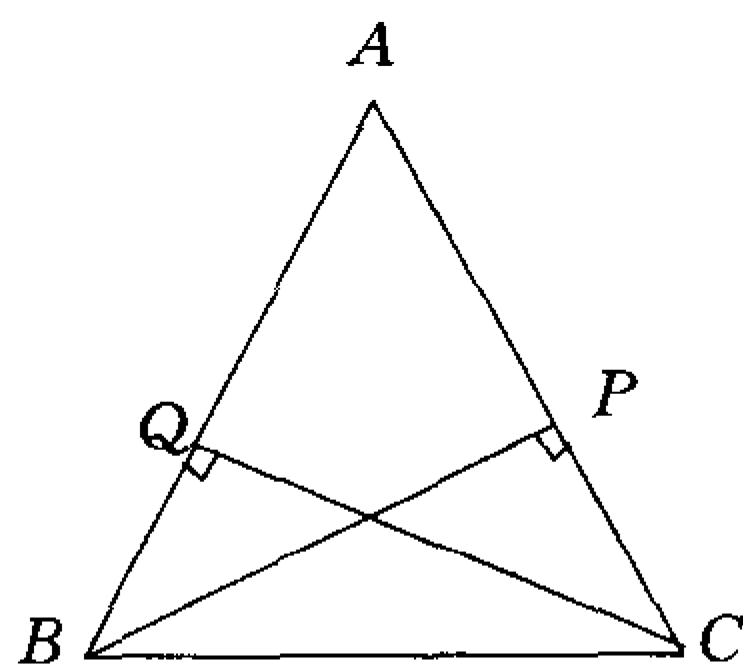


图 16-8

证明 如图 16-8.考虑在 BC 边

上取两端点，由于B点到AB边距离为零，C到AC边的距离为零，所以作$BP\perp AC$于P，$CQ\perp AB$于Q，则$BP=CQ$(定值).

因而　　$\mathrm{Rt}\triangle BCP\cong\mathrm{Rt}\triangle BCQ$,

$\angle PCB=\angle QBC$,

即　　$\angle ACB=\angle ABC$.

所以　$AB=AC$，且BC为底边.

引理 2　若三角形边上任意点到三边距离之和为定值，则此三角形为正三角形.

证明　今取BC边上的任意点，则此点到AB、AC的距离之和为定值，由引理 1，有$AB=AC$，同理有$AB=BC$，故$\triangle ABC$为正三角形.

引理 3　若三角形内任一点到各边距离之和为定值，则它的边上任意一点到三边的距离之和为同一定值.

证明　如图16-9，$\triangle ABC$内任一点P到三边的距离分别为PD、PE、PF，且设$PD+PE+PF=a$(定值)，Q在BC边上，Q到AB、AC的距离分别为QF'、QE'，则当$P\to Q$时，由距离的连续性(这要用到度量空间中的有关结论)，有

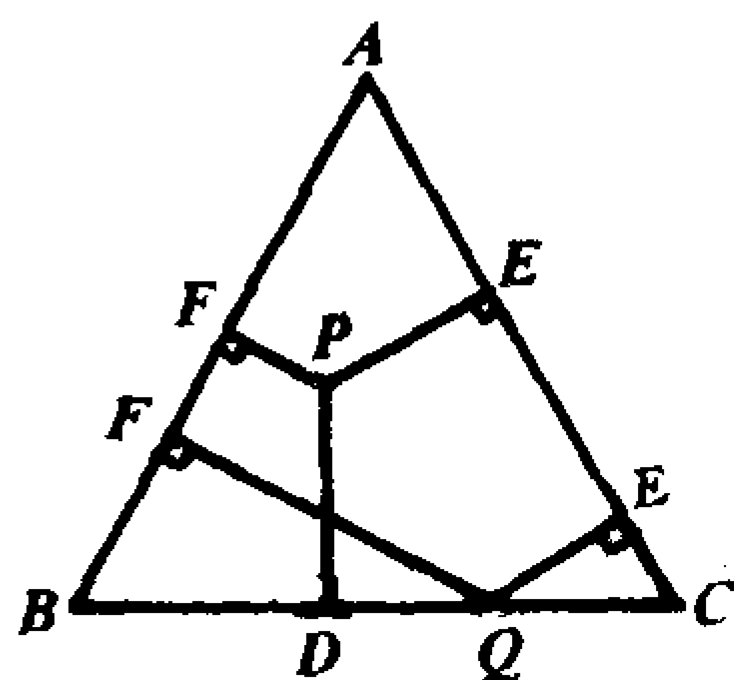


图 16-9

$$PD\to 0,PE\to QE',\ PF\to PF'$$

$$PD+PE+PF\to QE'+QF',$$

由$PD+PE+PF=a$，　有

$$QE'+QF'=a,$$

由理引 2、理引 3 即可得定理 16.7.

定理 16.8　若四面体内任一点到各面的距离之和为定值，则它的各面面积均相等.

证明仿上，略.

§ 16.4　定理的应用

例 16.1　求证正三角形外接圆上任一点到三边距离的平方和为定值.

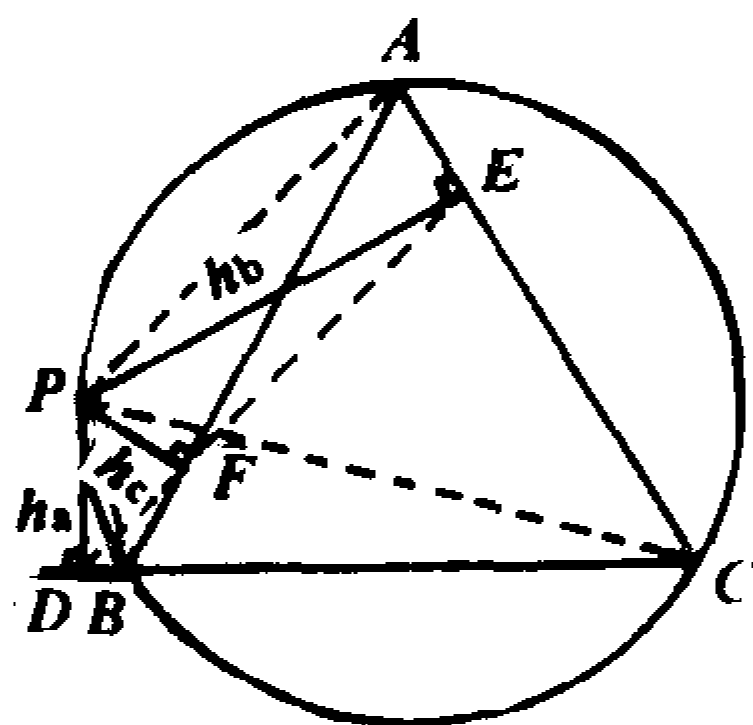


图 16-10

证明　如图 16-10 所设，正△ABC 外接圆上任一点 P 到 BC、AC、AB 的距离分别为 h_a、h_b、h_c，正三角形边长为 a，由定理 16.1 有

$$h_a + h_b - h_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

两边平方得

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 + 2(h_ah_b - h_bh_c - h_ah_c) = \frac{3}{4}a^2.$$

下证 $h_ah_b - h_bh_c - h_ah_c = 0$.

因为 $\dfrac{h_b}{PA} = \sin\angle PAC = \sin\angle PBD = \dfrac{h_a}{PB}$

$\Rightarrow h_a \cdot PA = h_b \cdot PB$.

同理可得　$h_a \cdot PA = h_c \cdot PC$，所以有

$$h_a \cdot PA = h_b \cdot PB = h_c \cdot PC. \qquad ①$$

又因为　P、F、E、A 共圆，所以 $\angle PFD = \angle PAC$.

同理　P、D、B、F 共圆，$\angle PDF = \angle PBF = \angle ACP$，

得　　$\triangle PFD \backsim \triangle PAC$.

所以　$\dfrac{h_c}{DF} = \dfrac{PA}{a}$，$PA = \dfrac{h_c}{DF}a$

同理　　$PB = \dfrac{h_c}{DE}a$，　$PC = \dfrac{h_b}{EF}a$.

均代入 ① 式得，

$$\frac{h_a \cdot h_c}{DF} = \frac{h_b \cdot h_a}{DE} = \frac{h_ch_b}{EF} = k.$$

由西姆松定理（见第二十二章）D、E、F 共线，所以

$h_ah_b - h_ah_c - h_bh_c = (DE - EF - DF)k = 0$. 从而 $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{3}{4}a^2$(定值).

例 16.2 设正三角形内切圆上任一点 P 到三边的距离分别为 h_a、h_b、h_c，求证：$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$ 为定值，并求出 $2(h_ah_b + h_ah_c + h_bh_c)$ 的值.

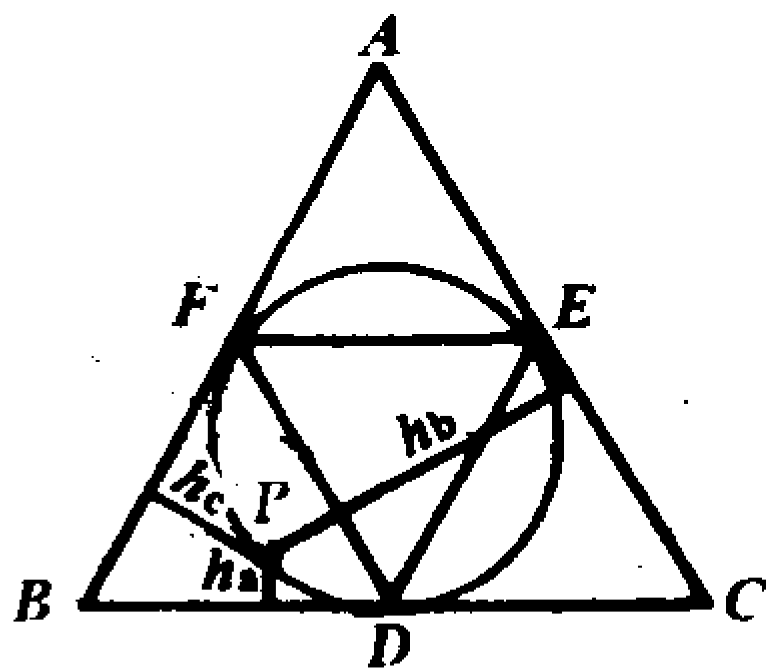


图 16-11

证明 如图16-11，正$\triangle ABC$边长为a，D、E、F 为切点，则 $\triangle DEF$ 为正三角形，且边长为$\frac{a}{2}$，$\triangle ABC$ 的内切圆为 $\triangle DEF$ 的外接圆，由例 16.1 有

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a - h_a\right)^2 + \left(h_b - \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a - h_c\right)^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

所以 $$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a(h_a + h_b + h_c) - \frac{3}{8}a^2$$

又 $$h_a + h_b + h_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad ②$$

故 $$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{3}{8}a^2(定值).$$

将 ② 式两端平方得

$$(h_a + h_b + h_c)^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

所以 $$2(h_ah_b + h_ah_c + h_bh_c) = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$

例 16.3 P 为正 $\triangle ABC$ 内切圆上一点，P 关于三边的对称点分别为 P_1、P_2、P_3(如图 16-12)，则

$$S_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$$

证明 过 P 向三边作垂线，垂足分别为 D、E、F，$PD =$

$h_1, PE=h_2 PF=h_3$，设正$\triangle ABC$的边长为a，依例16.2结论有

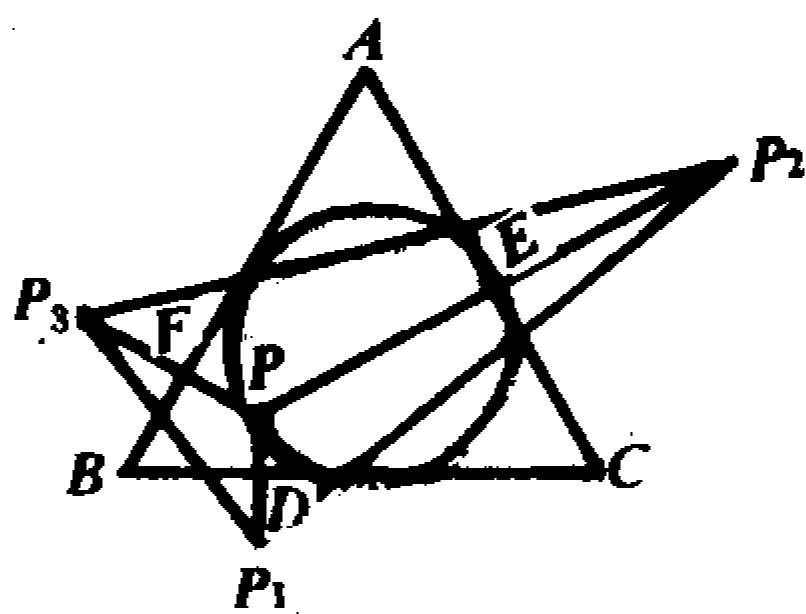


图16-12

$$h_1+h_2+h_3=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2=\frac{3}{8}a^2,$$

又 $\angle DPE=\angle EPF=\angle FPD=120^\circ$.

所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\sin 120^\circ(h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(h_1h_2+h_2h_3+h_1h_3)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}[(h_1+h_2+h_3)^2-(h_1^2+h_2^2+h_3^2)]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{8}a^2\right]$$

$$=\frac{3}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$=\frac{3}{16}S_{\triangle ABC}.$$

从而 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=4S_{\triangle DEF}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}.$ 证毕.

练习与思考

1. $\angle ABC=\angle CBD=60^\circ$，从$\angle ABC$内任一点$P$分别向$AB$、$BC$、$BD$作垂线$PX$、$PY$、$PZ$，$X$、$Y$、$Z$为垂足，求证：$PZ=PX+PY$.

2. 不等边三角形内一点至三边距离之和大于大边上的高，而小于小边上的高.

3. 试用解析法证明维维安尼定理.

第十七章　斯坦纳-雷米欧司定理

§17.1　定　　理

斯坦纳-雷米欧司定理　两条内角平分线相等的三角形为等腰三角形.

这是一道脍炙人口的几何名题. 日本数学教育学会会长井上义曾经赞誉它是"作为一个难题而闻名的". 这一问题是由德国数学家雷米欧司(Lehmus)于1840年在给斯图姆(Sturm)的一封信中提出的. 他说,几何题在没有证明之前,很难说它是难还是容易. 等腰三角形两底角分角线相等,初中生都会证,可是反过来,已知三角形两内角平分线相等,要证它是等腰三角形却不容易了,我至今还没想出来. 斯图姆向许多数学家提到了这件事,后来是瑞士几何学家斯坦纳(Steiner,1796～1873年)给出了最初的一个证明. 所以这个定理就以斯坦纳—雷米欧司定理而闻名于世.

斯坦纳出生于一个贫困的农民家庭,14岁还是一个文盲,后来半耕半读,22岁考入德国海得堡大学,1834年成为柏林大学教授.

斯坦纳的证明发表后,引起数学界极大反响. 后来,有一个数学刊物公开征求这一问题的证明,经过收集整理,得出60多种证法,编成了一本书. 到了1940年前后,有人竟用添圆弧的方法,找到了这一问题的一个最简单的间接证法. 1980年美国《数学教师》第12期介绍了这个定理的研究现状,结果

收到两千多封来信，又增补了 20 多种证法并且得到了这一问题的一个最简单的直接证法. 从问题的提出，到这两个简捷证法的诞生，竟用了 140 年之久. 可见在数学这个百花园里，几何确是一个绚丽多彩、引人入胜的花坛，那些耐人寻味、经久不衰的名题，经过几代数学家的努力，得出了一些发人深省的精妙解法，有的博大深远、有的精巧绝伦，使我们不得不为之惊叹！

§ 17.2　定理的证明

证法 1　如图 17-1，设 $BC=a, AB=c, AC=b$，则由角平分线定理有

$$AD=\frac{bc}{a+c}, DC=\frac{ab}{a+c},$$

$$AE=\frac{bc}{a+b}, BE=\frac{ac}{a+b}.$$

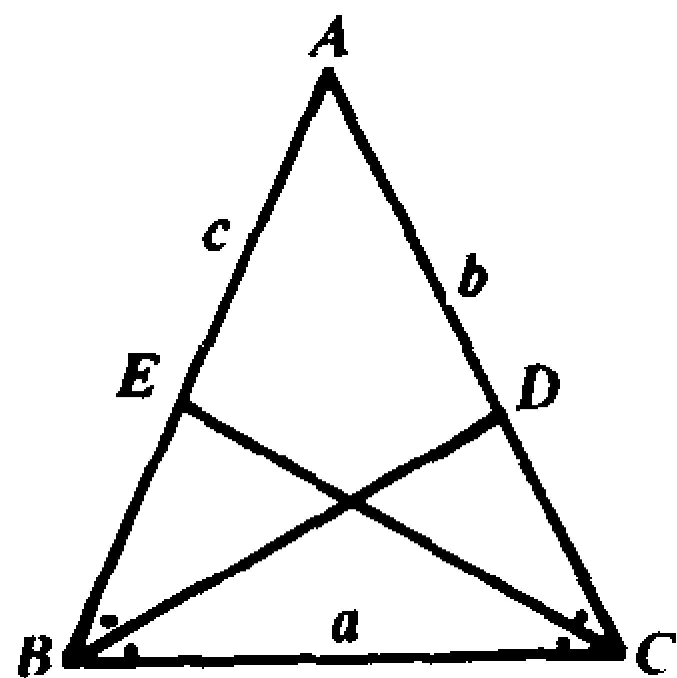


图 17-1

又据斯库顿定理(见第八章)，有

$$BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$$
$$=ac-\frac{bc}{a+c}\cdot\frac{ab}{a+c},$$

$$CE^2=AC\cdot BC-AE\cdot EB=ab-\frac{bc}{a+b}\cdot\frac{ac}{a+b}.$$

又 $BD=CE$，

所以　$$ac-\frac{ab^2c}{(a+c)^2}=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2},$$

整理得　$$(b-c)(a^3+a^2b+a^2c+3abc+b^2c+bc^2)=0.$$

显然后一因式不等于零，故 $b-c=0$，即 $AB=AC$.

证法 2　各边如前所设，又设 $\angle ABC=2\alpha, \angle ACB=2\beta$.

因为　$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin 2\alpha=\frac{1}{2}ab\sin 2\beta,$$

所以 $\dfrac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}=\dfrac{c}{b}$. ①

又因为 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDC}=S_{\triangle AEC}+S_{\triangle CEB}$,

所以 $\dfrac{1}{2}c\cdot BD\sin\alpha+\dfrac{1}{2}a\cdot BD\sin\alpha$

$$=\frac{1}{2}b\cdot CE\sin\beta+\frac{1}{2}a\cdot CE\sin\beta.$$

又 $BD=CE$, 所以$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{a+c}{a+b}$. ②

① ÷ ② 得 $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\dfrac{ac+bc}{ab+bc}$. ③

若 $\alpha\neq\beta$,不妨设 $\alpha>\beta$,由于 α、β 均为锐角,则 $\cos\alpha<\cos\beta$,从而由 ③ 有

$\dfrac{ac+bc}{ab+bc}>1$,故 $c>b$.

另一方面,因$\alpha>\beta\Rightarrow 2\alpha>2\beta\Rightarrow b>c$,矛盾,这说明$\alpha$、$\beta$只能相等,故 $AB=AC$.

证法 3 如图 17-2,设 $\angle ABC=2\alpha$,$\angle ACB=2\beta$,过C点作$CF\parallel BD$,过 B 点作 $BF\parallel AC$,两线交于 F,则 $BFCD$ 是平行四边形,$\angle CBF=2\beta$,$\angle BCF=\alpha$,$BD=CF$,所以$CE=CF$,$\angle 1=\angle 2$.

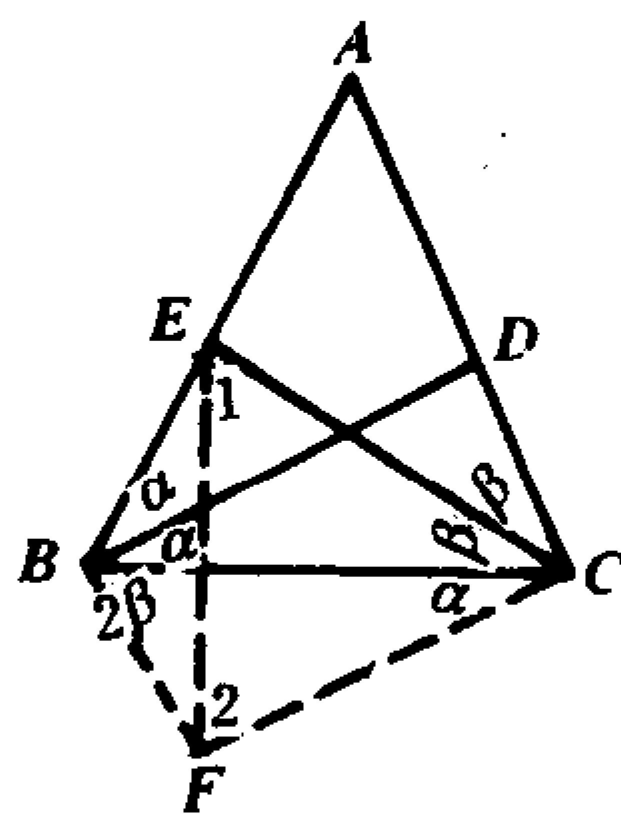


图 17-2

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BCF$ 中,有两边对应相等,如果夹角$\alpha\neq\beta$,不妨设$\alpha>\beta$,则

$BF>BE$. ④

在$\triangle BEF$中,$\angle BEF=\angle BEC-\angle 1=180°-2\alpha-\beta-\angle 1$

$=180°-(\alpha+\beta)-\angle 1-\alpha$, ⑤

$$\angle BFE = \angle BFC - \angle 2 = 180° - 2\beta - \alpha - \angle 2$$
$$= 180° - (\alpha + \beta) - \angle 2 - \beta. \qquad ⑥$$

比较 ⑤ 和 ⑥， 因为 $\alpha > \beta$， 所以 $\angle BEF < \angle BFE$，则 $BE > BF$，这与 ④ 矛盾，因此原假设 $\alpha \neq \beta$ 不真.

所以 $\alpha = \beta$ 必成立，从而 $2\alpha = 2\beta$，得 $AB = AC$.

证法 4 如图 17-3，设 $AB \neq AC$，不妨设 $AB > AC$，则 $\beta > \alpha$，在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BCD$ 中， 因为 $CE = BD, BC = BC, \alpha < \beta$， 所以 $CD < BE$. ⑦

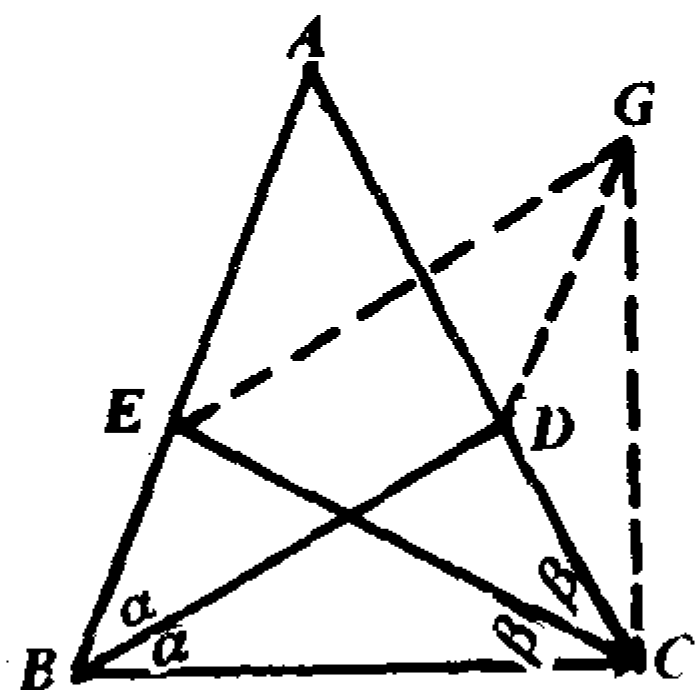


图 17-3

作 $\square BDGE$，则 $GD = EB, EG = BD = CE$，所以 $\angle EGC = \angle ECG$.

又 $\alpha < \beta$，则 $\angle DGC > \angle DCG$，即 $CD > DG = BE$. 这与 ⑦ 式矛盾，故 $AB > AC$ 不成立. 同理 $AB < AC$ 也不成立，所以 $AB = AC$.

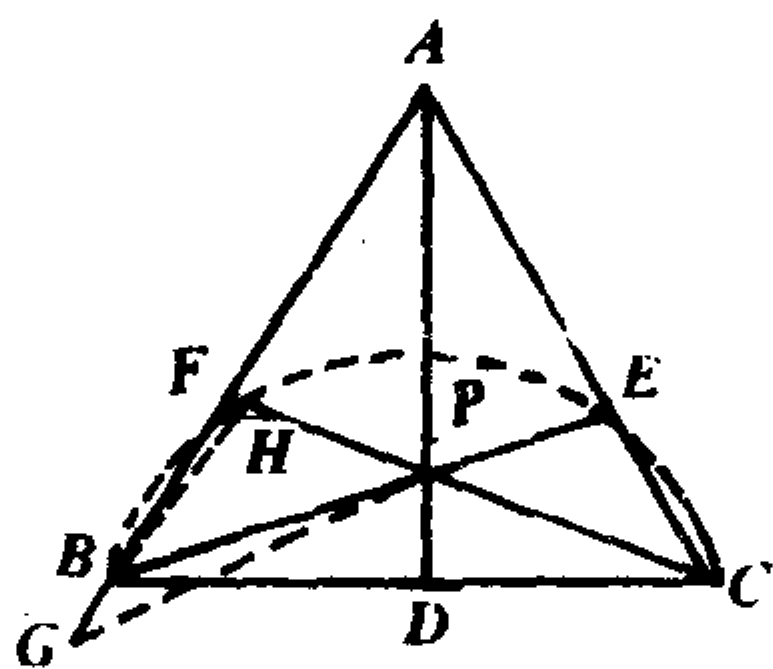


图 17-4

证法 5 如图 17-4，假设 $AB > AC$，则 $\angle ABD < \angle ECA$，在 $\angle ECA$ 中，作 $\angle ECD' = \angle EBD$，交 BD 于 D'，则 B、C、D'、E 四点共圆，且 $\overset{\frown}{ED'} = \overset{\frown}{D'C} < \overset{\frown}{BE}$，由此 $\overset{\frown}{BED'} > \overset{\frown}{ED'C}$，故 $BD' > CE$，从而 $BD > CE$，这与 $BD = CE$ 矛盾.

所以 $AB > AC$ 不成立；同理 $AB < AC$ 也不成立. 故 $AB = AC$.

最后我们给出前面提到的最简捷的直接证法.

证法 6 如图 17-5，不妨设 $\angle B \geqslant \angle C$，在 OE 上取 M，使 $\angle OBM = \angle OCD$，连 BM 交 AC 于 N，

则 $\triangle BND \backsim \triangle CNM$. 因为 $CM \leqslant BD$, 所以 $BN \geqslant CN$. 所以 $\angle NCB \geqslant \angle OBM + \dfrac{\angle B}{2} = \dfrac{\angle C}{2} + \dfrac{\angle B}{2}$.

即 $\angle C \geqslant \angle B$, 已设 $\angle B \geqslant \angle C$

所以 $\angle B = \angle C$.

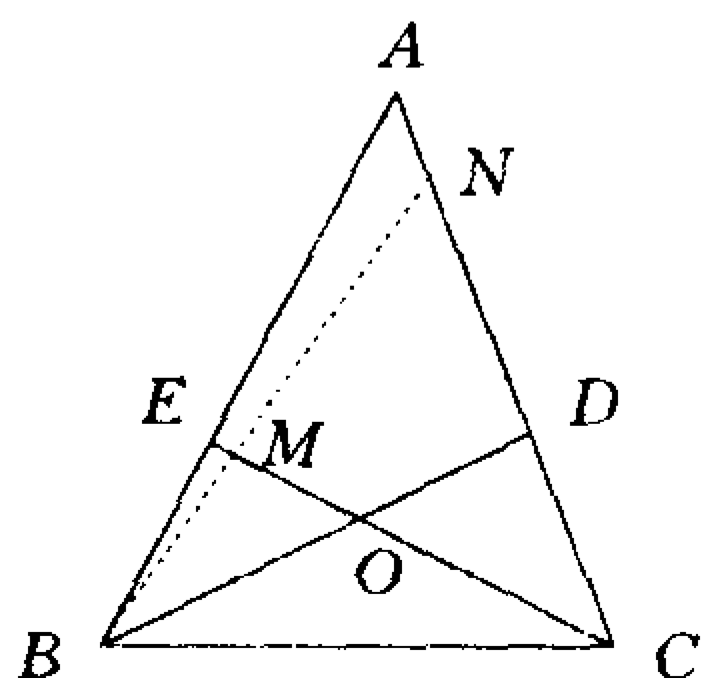


图 17-5

§17.3 定理的推广

定理 17.1 在 $\triangle ABC$ 中, P 为 $\angle A$ 平分线 AD 上异于 D 的任意一点, BP, CP 的延长线分别交 AC、AB 于 E、F, 若 $BE = CF$, 则 $AB = AC$.

证明 如图 17-6, 假设 $AB < AC$, 据余弦定理有

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP\cos\frac{A}{2}.$$

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP\cos\frac{A}{2}.$$

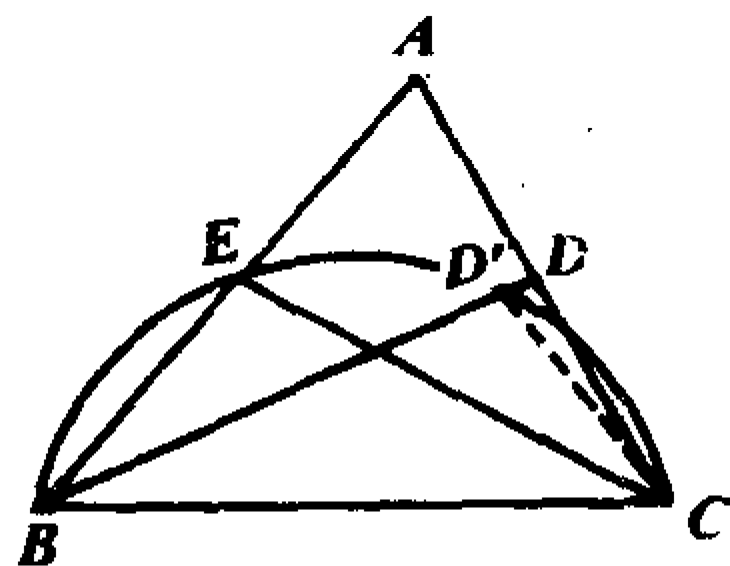


图 17-6

两式相减, 并整理得

$$CP^2 - BP^2 = (AC - AB)(AC + AB - 2AP\cos\frac{A}{2}).$$

由显然的几何关系得

$$AD < \frac{1}{2}(AC + AB).$$

而 $\quad AP\cos\dfrac{A}{2} < AP < AD$,

则 $\quad AC + AB - 2AP\cos\dfrac{A}{2} > 0$.

又 $\quad AC - AB > 0$, 故 $\quad CP^2 - BP^2 > 0$.

所以　$CP > BP$，从而 $\angle PBC > \angle PCB$.

延长 AB 到 G，使 $AG = AC$，连 GP，则 $\triangle AGP \cong \triangle ACP$，得 $\angle AGP = \angle ACP$.

而 $\angle ABP > \angle AGP$，故 $\angle ABP > \angle ACP$.

在 PF 上取点 H，使 $\angle PBH = \angle ACP$，则 B、C、E、H 共圆，已证 $\angle PBC > \angle PCB$.

所以　$\angle HBC > \angle ECB \Rightarrow \overset{\frown}{HEC} > \overset{\frown}{BHE} \Rightarrow CH > BE$.

又 $CF > CH$，所以 $CF > BE$，与已知矛盾.

故 $AB < AC$ 不成立；同理 $AB > AC$ 也不成立；所以 $AB = AC$.

定理 17.2　如图 17-7，设 D、E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 上的点，BD、CE 分别内分 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 为 $1:k$，且有 $BD = CE$，则 $AB = AC$.

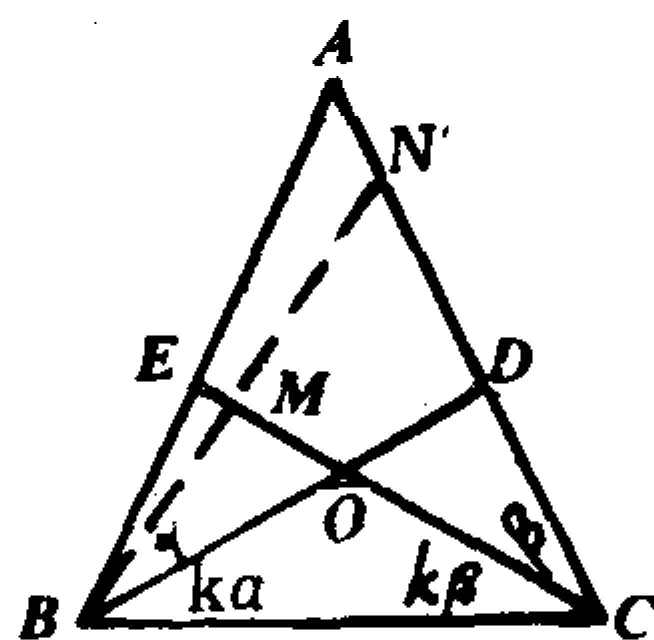


图 17-7

证明　设 $\angle ABD = \alpha$，$\angle ACE = \beta$，则 $\angle DBC = k\alpha$，$\angle ECB = k\beta$.

若假设 $\angle B \geqslant \angle C$，则 $\alpha \geqslant \beta$，在 OE 上取点 M，使 $\angle OBM = \angle\beta$，连 BM 交 AC 于 N，则 $\triangle NBD \backsim \triangle NCM$.

因为　$CM \leqslant BD$，　　所以　$BN \geqslant NC$.

从而　$(k+1)\beta \geqslant \beta + k\alpha \Rightarrow \beta \geqslant \alpha \Rightarrow \angle C \geqslant \angle B$.

所以有 $\angle B = \angle C$.

特别地，当 $k = 1$ 时，为斯坦纳 - 雷米欧司定理.

§ 17.4　一个有趣的反例

斯坦纳 - 雷米欧司定理是说两内角平分线相等的三角形

是等腰三角形，很自然地使我们联想到：两外角平分线相等的三角形是否也为等腰三角形呢？回答是否定的，有下面的反例为证.

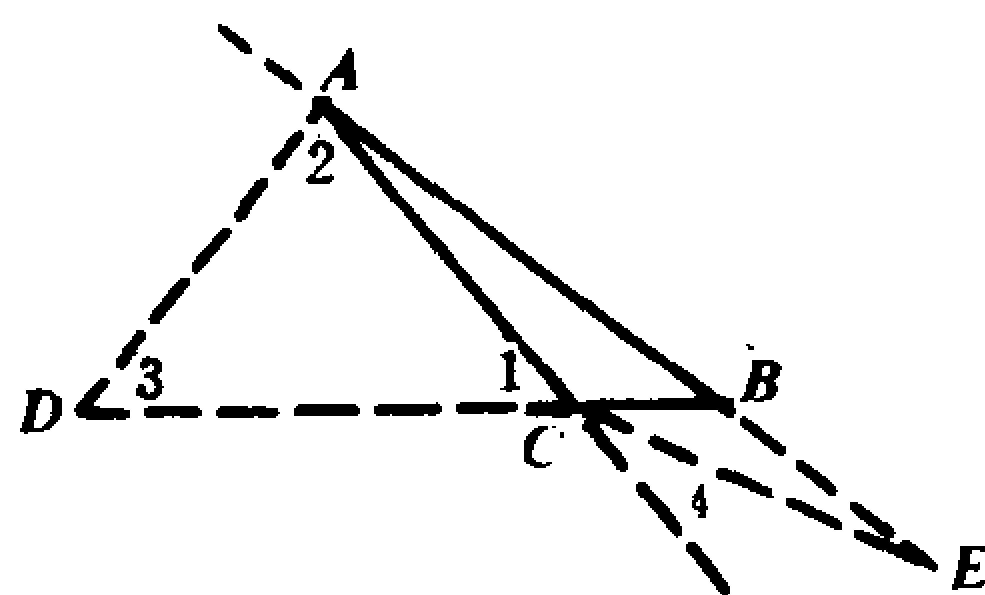


图 17-8

如图 17-8，在 $\triangle ABC$ 中，AD、CE 分别为 $\angle A$、$\angle C$ 的两外角平分线，$\angle A=12°$，$\angle B=36°$，$\angle C=132°$，AD、CE 为外角平分线，易知 $\angle 1=48°$，$\angle 2=84°$，$\angle 3=48°$，所以 $AD=AC$.

又易知 $\angle 4=24°$，$\angle E=12°$，$AC=CE$.

故两条外角平分线 $AD=CE$，但 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形.

但日本的井上仪夫教授将上述条件加强，得到

定理17.3 两外角平分线相等，且第三角为该三角形的最大或最小内角时，此三角形是等腰三角形.

证明留给读者.

练习与思考

1. 证明两条中线相等的三角形是等腰三角形.
2. 证明两条高线相等的三角形是等腰三角形.
3. 证明两条对角线相等的梯形是等腰梯形.

第十八章　拿破仑定理

§18.1　定　　理

拿破仑定理　以三角形各边为边分别向外侧作等边三角形,则三个等边三角形的中心构成一个等边三角形.

拿破仑(Napoleon,1769～1821年)是法国历史上著名的皇帝,杰出的政治家和军事家.他很重视数学,曾说:"一个国家只有数学蓬勃发展,才能表现它的国力强大".在数学各领域中,拿破仑更偏爱几何学,在他的戎马生涯中,精湛的几何知识帮了他很大的忙,他在成为法国的统治者之前,常常和大数学家拉格朗日(Lagrange,1736～1813年)和拉普拉斯(Laplace,1749～1827年)进行讨论,拉普拉斯后来成为拿破仑的首席军事工程师.在拿破仑执政期间,法国曾云集了一大批世界第一流的数学家.但是,拿破仑对几何学是否精通到能够独立发现并证明这个定理却是一个疑问,关于拿破仑对几何学的贡献多是些轶事性的传说.正如加拿大几何学家考克塞特(Coxeter)指出,这一定理"已归在拿破仑的名下,虽然他是否具备足够的几何学知识作出这项贡献,如同他是否有足够的英语知识写出著名的回文(即倒念顺念一样)

ABLE　WAS　I　ERE　I　SAW　ELBA

一样是值得怀疑的."

但是人们已习惯于把它称为拿破仑定理,特别地把所得到的正三角形称为拿破仑三角形.

§ 18.2　定理的证明

证法 1　如图 18-1，$\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle ACB'$ 分别为向形外作的等边三角形. 将 $\triangle ABB'$ 绕 A 点沿顺时针方向旋转 60°，则 B' 与 C 重合，B 与 C' 重合，故

$$BB' = C'C.$$

同理可得　$AA' = BB'$.

所以　$AA' = BB' = CC'$.

图 18-1

设 $\triangle ABC$ 三边分别为 a、b、c.

则　$O_3B = \dfrac{\sqrt{3}}{3}c, BO_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a.$

$$\text{所以}\left.\begin{array}{l}\dfrac{BO_3}{BO_1} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{BC'}{BC} \\ \angle O_3BO_1 = \angle C'BC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle O_3BO_1 \backsim \triangle C'BC$$

$$\Rightarrow \frac{O_3O_1}{C'C} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理　$\dfrac{O_1O_2}{AA'} = \dfrac{O_2O_3}{BB'} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 所以 $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.

故 $\triangle O_1O_2O_3$ 为等边三角形.

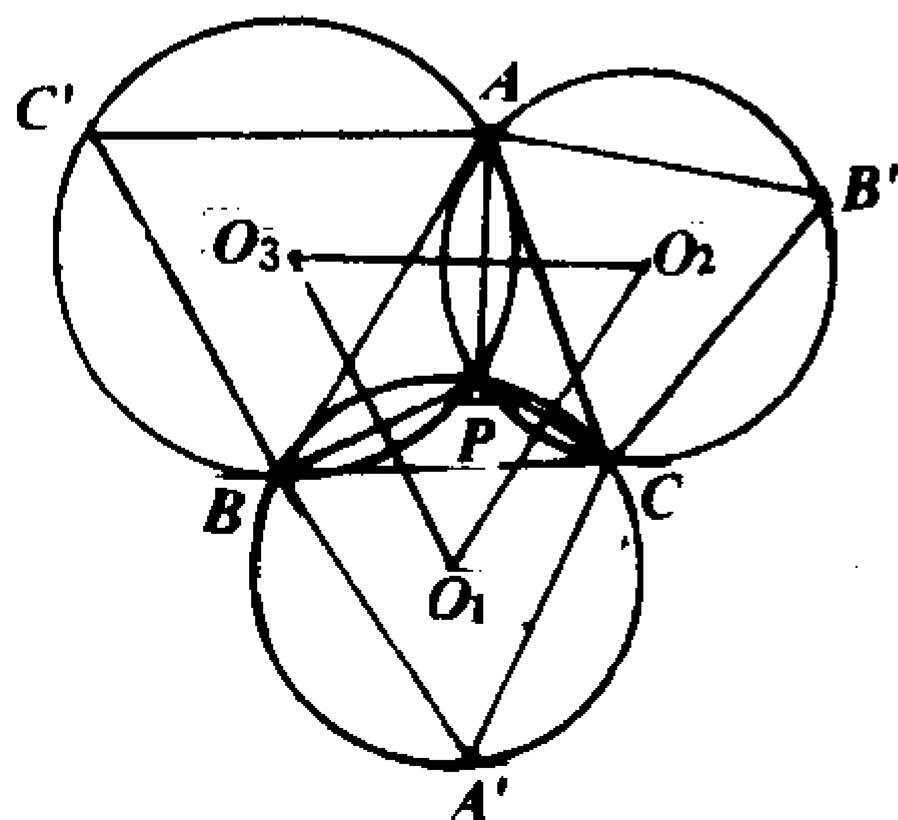


图 18-2

证法 2　如图 18-2. 设 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle AB'C$ 均为正三角形，其外接圆交于 A、P 两点，连 PB、PC、PA.

因为　$\angle APB + \angle C'$

$= \angle APC + \angle B' = 180°$,

$\angle B' = \angle C' = 60°$,

所以　$\angle APB = \angle APC = 120°$,

从而　$\angle BPC = 120°$,故点 P 在正 $\triangle A'BC$ 的外接圆上.
因此有 $O_3O_1 \perp PB$, $O_3O_2 \perp PA$.

所以 $\angle O_3 = \angle 180° - \angle APB = 60°$,

同理可证 $\angle O_1 = \angle O_2 = 60°$,

故 $\triangle O_1O_2O_3$ 为正三角形.

由证法 2,我们可得下面一个重要推论.

推论　以三角形每边为边向外作正三角形,则这三个正三角形的外接圆共点.

这点通常被称为原三角形的费马(Fermat)点(见第二十四章).

§18.3　定理的引伸与推广

1. 引伸

首先,拿破仑定理可表述为

定理 18.1　以三角形各边为底向外作顶角等于 120° 的等腰三角形,则三顶点构成等边三角形.

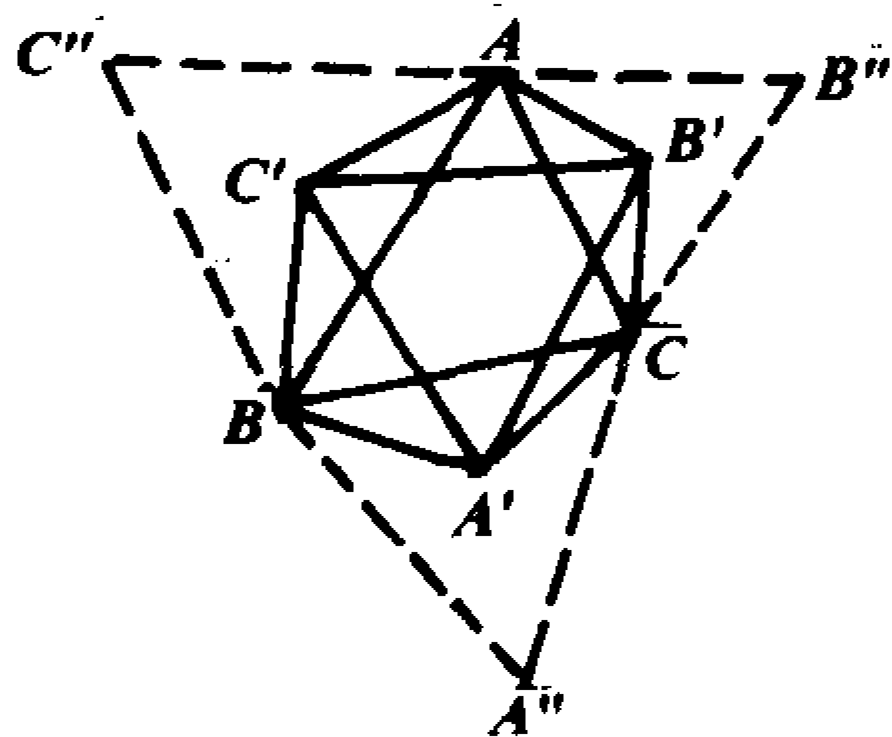


图 18-3

如图 18-3,若我们将图形补充"完整",三顶点变为三正三角形的中心,问题已不证自明.

其次我们将"向外侧作正三角形"改为向内侧作正三角形,又有

定理 18.2　以三角形各边为边向内侧作等边三角形,则它们的

中心构成等边三角形.

证明可仿前面的证法 1、证法 2 对称地写出. 但下面我们给出它的另一个证明,由这个证明我们还可得到一个有趣的“副产品”.

证明 如图 18-1,在 $\triangle BO_1O_3$ 中,有

$$O_1O_3^2=\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}ac\cos(\angle B+60^\circ) \qquad ①$$

如图 18-4,$\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$ 分别为以 $\triangle ABC$ 各边为边向内侧作的正三角形,N_1、N_2、N_3 分别为其中心,在 $\triangle BN_1N_3$ 中,因为 N_1、N_3 与 O_1、O_3 分别关于 BC、AB 对称,所以有

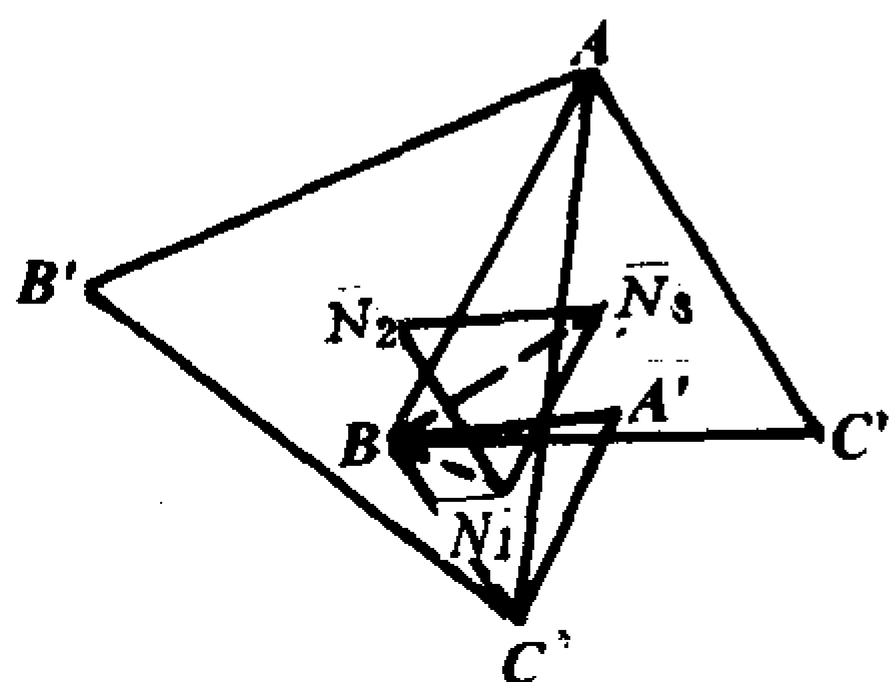


图 18-4

$$N_1N_3^2=\frac{1}{3}c^2+\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}ac\cos(\angle B-60^\circ) \qquad ②$$

① − ② 得 $O_1O_3^2-N_1N_3^2=\frac{2}{\sqrt{3}}ac\sin B=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC}$.

同理可得 $O_2O_3^2-N_2N_3^2=O_1O_2^2-N_1N_2^2=\frac{4}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC}$.

因为 $O_1O_2=O_2O_3=O_3O_1$,

所以 $N_1N_2=N_2N_3=N_3N_1$.

即 $\triangle N_1N_2N_3$ 为正三角形.

为区别于前者,我们不妨把这个三角形称为内拿破仑三角形.

由上面的证明,我们有等式

$$\frac{\sqrt{3}}{4}O_1O_3^2-\frac{\sqrt{3}}{4}N_1N_3^2=S_{\triangle ABC}.$$

即有

定理 18.3 任意三角形的外拿破仑三角形与内拿破仑三角形的面积之差等于原三角形的面积，并且内、外拿破仑三角形有同一中心.

后一结论的证明留给有兴趣的读者.

特别指出，上述结论当 A、B、C 共线时仍成立. 关于拿破仑定理. 在爱可尔斯定理一章(见第十九章)我们还会继续讨论.

2. 推广

下面我们把正三角形向相似三角形推广，得到

定理 18.4 以任意 $\triangle ABC$ 的各边为边向外侧作与其相似的 $\triangle A'BC$、$\triangle CB'A$、$\triangle BAC'$，则它们的外心构成的三角形与这三个三角形相似.

证明 如图 18-5，记 $\angle B'=\alpha$，$\angle C'=\beta$，$\angle A'=\gamma$. 设 $\odot O_3$ 与 $\odot O_2$ 交于 P，则

$\angle APB=180°-\beta$，

$\angle APC=180°-\alpha$，

所以$\angle BPC=360°-[360°-(\alpha+\beta)]=180°-\gamma$ 故点 P 在 $\odot O_1$ 上，从而有

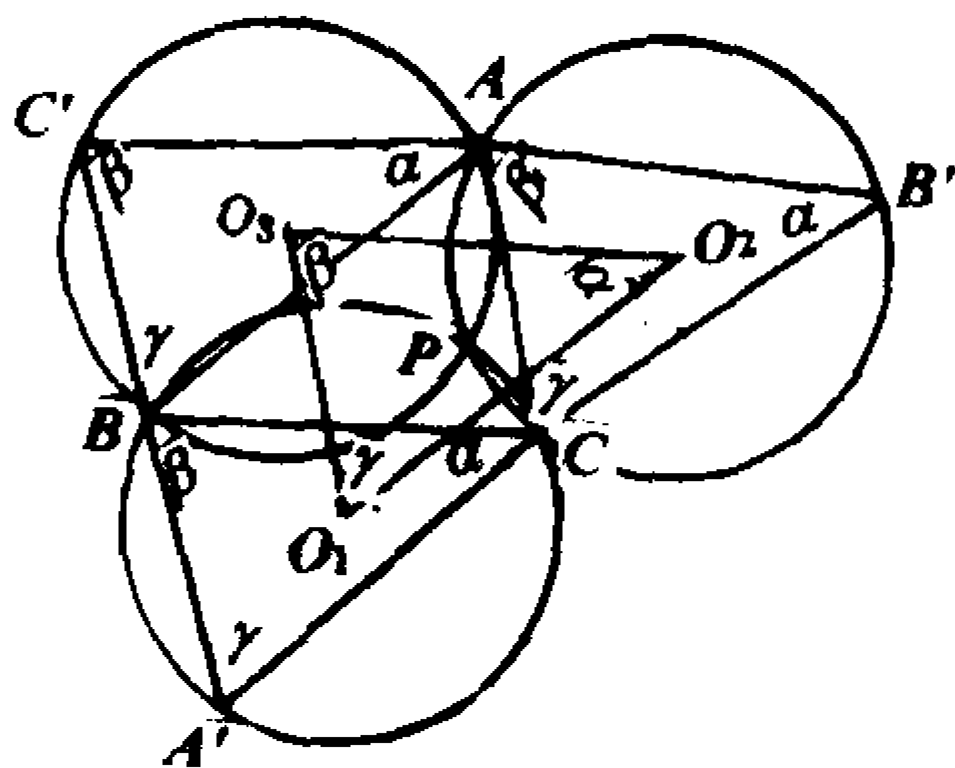


图 18-5

$O_1O_3\perp PB$，$O_2O_1\perp PC$，

$\angle O_1=180°-\angle BPC=\angle A'=\gamma$.

同理可得 $\angle O_2=\angle B'=\alpha$，$\angle O_3=\angle C'=\angle\beta$.

故 $\triangle O_1O_2O_3$ 与三个相似三角形相似. 证毕.

相应于定理 18.2，还有

定理 18.5 以任意$\triangle ABC$的各边为边向内侧作与其相似的$\triangle A'CB$、$\triangle CB'A$、$\triangle BAC'$，则它们的外心构成的三角形与这三个三角形相似.

向任意三角形推广，又有

定理 18.6 在$\triangle ABC$的三边上向外(内)作$\triangle A'BC$、$\triangle CB'A$、$\triangle ABC'$，使$\angle A'+\angle B'+\angle C'=180°$，则这三个三角形的外接圆共点，且它们的外心构成的三角形三角分别等于$\angle A'$、$\angle B'$、$\angle C'$.

证明类似于定理 18.4，略.

向平行四边形推广，有

定理 18.7 以平行四边形各边为一边向外侧作正方形，则四个正方形的中心构成一正方形.

略证如下

证明 如图 18-6，容易得到

$\triangle AO_1O_4 \cong \triangle BO_1O_2 \cong \triangle CO_2O_3 \cong \triangle DO_3O_4$，

所以 $O_4O_1=O_1O_2=O_2O_3=O_3O_4$

又 $\angle C_4O_1O_2=90°-\angle AO_1O_4+BO_1O_2=90°$.

所以 四边形$O_1O_2O_3O_4$为正方形，命题得证.

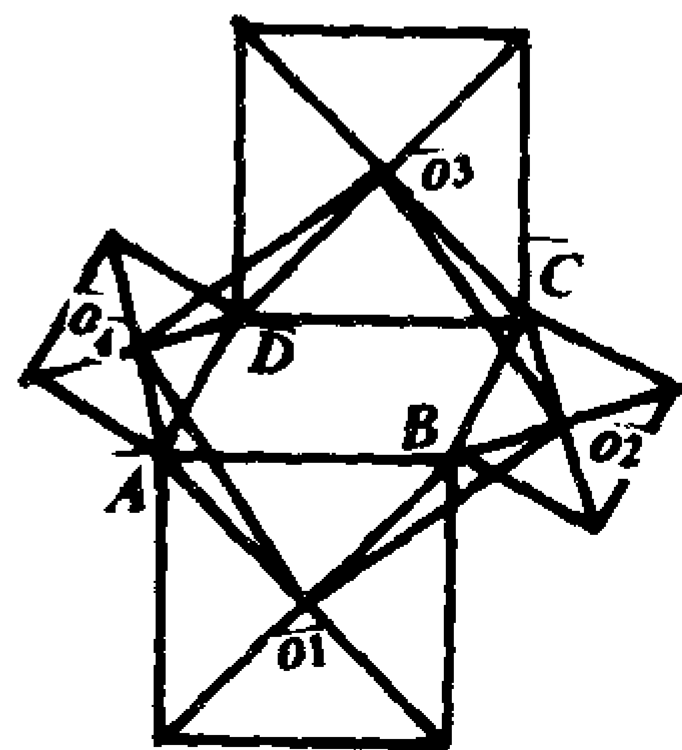


图 18-6

当然也有

定理 18.8 以平行四边形(非正方形)各边为一边向内侧作正方形，则四个正方形的中心构成正方形.

练习与思考

1. 在图 18-1 中，证明：

(1) 直线 $A'O_1$、$B'O_2$、$C'O_3$ 都经过 $\triangle ABC$ 的外心;

(2) AO_1、BO_2、CO_3 共点;

(3) 线段 AA'、BB'、CC' 长度相等且它们所在的三条直线共点.

2. 在图 18-4 中,证明 AN_1、BN_2、CN_3 共点.

3. 在任意凸四边形 $ABCD$ 各边上依次轮流向外及向内画等边三角形,证明:所得到的四个新顶点确定一个平行四边形.

4. 若将定理 18.7、定理 18.8 所得的正方形分别叫做外拿破仑正方形和内拿破仑正方形. 找出外拿破仑正方形面积减内拿破仑正方形面积与平行四边形面积之间的关系.

第十九章　爱可尔斯定理

§19.1　定　　理

爱可尔斯定理 1　若 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是正三角形，则线段 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 的中点也构成正三角形.

爱可尔斯定理 2　若 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$ 都是正三角形，则 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$ 的重心也构成正三角形.

这是爱可尔斯(Echols)1932 年在美国《数学月刊》上论述过的问题(爱可尔斯定理 1 曾被芜湖市选用作为 1983 年中学生数学竞赛试题).

§19.2　定理的证明

首先我们证明爱可尔斯定理 1，这个定理有多种证法，下面的证明是较简捷的.

证明　如图 19-1，设正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长为 a，正 $\triangle A_2B_2C_2$ 的边长为 b，A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 的中点分别为 D、E、F，延长 A_1B_1、A_2B_2 交于 M，A_1C_1、A_2C_2 交于 N，因为 $\angle MA_1N=\angle MA_2N=60°$，所以 A_1、M、N、A_2 四点共圆，所以 $\angle M=\angle N$(设为 α, $0°\leqslant\alpha<180°$). 在四边形 $A_1B_1B_2A_2$ 和四边形 $A_1C_1C_2A_2$

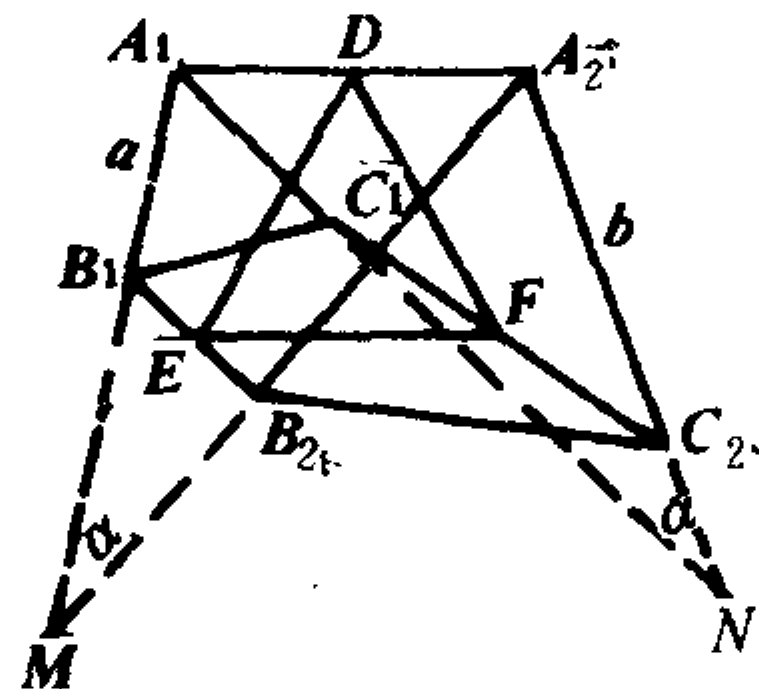


图 19-1

中，由定理 9.2 得到的公式（Ⅱ）.

$$l=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$

得 $DE=DF$，同理可得 $DE=EF$. 故 $\triangle DEF$ 为正三角形.

下面证明爱可尔斯定理 2.

证明 设 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 的中点分别为 D'、E'、F'（图 19-2），则由爱可尔斯定理 1 知 $\triangle D'E'F'$ 为正三角形，又设 D、E、F 分别为 A_3D'、B_3E'、C_3F' 上的点，且

$$\frac{A_3D}{DD'}=\frac{B_3E}{EE'}=\frac{C_3F}{FF'}=2,$$

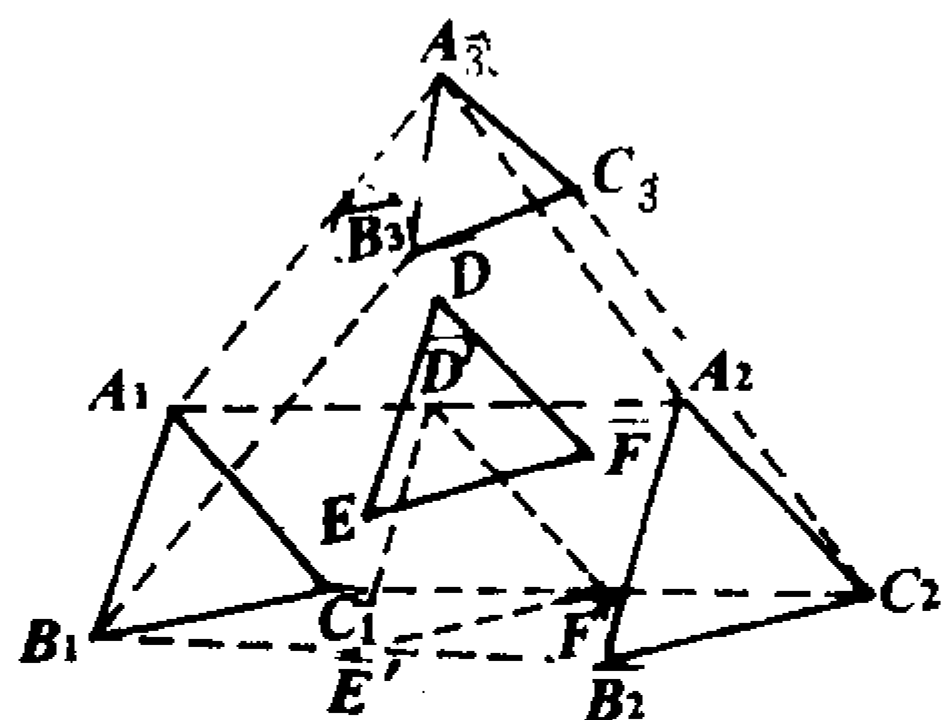


图 19-2

则 D、E、F 分别为 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$、$\triangle C_1C_2C_3$ 的重心，由定理 9.2 的公式（*）：

$$EF=\frac{1}{m+n}\sqrt{(am)^2+(bn)^2+2am\cdot bn\cos\alpha}$$

中，令 $\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$，可得 $DE=DF=EF$，即 $\triangle DEF$ 为正三角形.

§19.3 定理的推广

1. 爱可尔斯定理 1 的推广

将中点 D、E、F 推广，可得

定理 19.1 设 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$ 均为正三角形，D、E、F 分别为 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 上的点，且

$$\frac{A_1D}{DA_2}=\frac{B_1E}{EB_2}=\frac{C_1F}{FC_2}=\frac{m}{n},$$

则 $\triangle DEF$ 为正三角形.

根据定理 9.2 中的公式（Ⅰ）不难得到其证明，留给读者自己写出.

如将正三角形向相似三角形推广，则有

定理 19.2 设$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$同向相似，D、E、F分别为A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2上的点，且

$$\frac{A_1D}{DA_2}=\frac{B_1E}{EB_2}=\frac{C_1F}{FC_2}=\frac{m}{n},$$

则$\triangle DEF$也与$\triangle A_1B_1C_1$及$\triangle A_2B_2C_2$同向相似.

证明 如图 19-3，设A_1B_1、A_2B_2交于M，A_1C_1、A_2C_2交于N，$\triangle A_1B_1C_1$的三边为a、b、c，$\triangle A_2B_2C_2$对应的三边为a'、b'、c'.

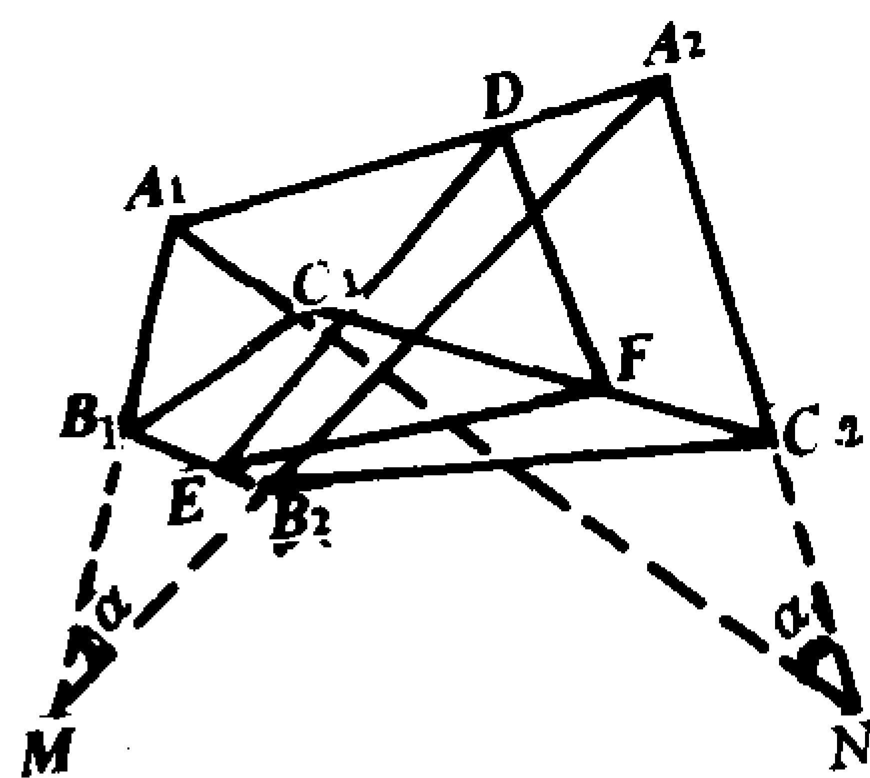


图 19-3

因为$\angle MA_1N=\angle MA_2N$，所以$A_1$、$M$、$N$、$A_2$共圆，所以$\angle M=\angle N=\alpha$，$(0\leqslant\alpha<180°)$，在四边形$A_1B_1B_2A_2$和四边形$A_1C_1C_2A_2$中，分别由定理 9.2 中的（*）式有

$$DE=\frac{1}{m+n}\sqrt{(cm)^2+(c'n)^2+2\cdot c'm\cdot b'n\cos\alpha},$$

$$DF=\frac{1}{m+n}\sqrt{(bm)^2+(b'n)^2+2\cdot bm\cdot b'n\cdot\cos\alpha}.$$

设$\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}=k$，则$c=bk$，$c'=b'k$. 从而有

$$\begin{aligned}DE&=\frac{1}{m+n}\sqrt{(bkm)^2+(b'kn)^2+2\cdot bkm\cdot b'kn\cdot\cos\alpha}\\&=k\frac{1}{m+n}\sqrt{(bm)^2+(b'n)^2+2\cdot bm\cdot b'n\cos\alpha}\\&=k\cdot DF.\end{aligned}$$

所以$\frac{DE}{DF}=k$，即$\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{DE}{DF}\Rightarrow\frac{A_1B_1}{DE}=\frac{A_1C_1}{DF}$.

同理可得 $\frac{A_1B_1}{DE}=\frac{B_1C_1}{EF}$.

故　$\triangle DEF$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$ 同向相似.

将三角形向多边形推广，可得

定理 19.3　设 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$ 与 n 边形 $A_2B_2\cdots C_2$ 同向相似，点 D、E、…、F 分别在 A_1A_2、B_1B_2、…、C_1C_2 上，且

$$\frac{A_1D}{DA_2}=\frac{B_1E}{EB_2}=\cdots=\frac{C_1F}{FC_2}=\frac{m}{n},$$

则 n 边形 $DE\cdots F$ 与 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$，及 $A_2B_2\cdots C_2$ 同向相似.

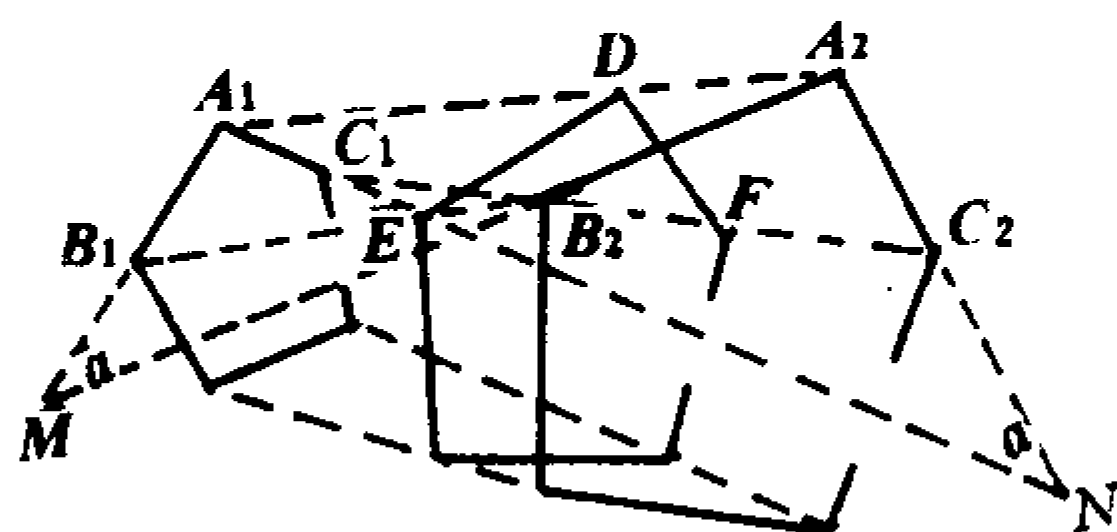


图 19-4

证明　如图 19-4，因为 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$ 与 n 边形 $A_2B_2\cdots C_2$ 同向相似，所以有 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 也同向相似，由定理 19.2 有 $\triangle DEF$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 同向相似，得

$$\angle EDF=\angle B_1A_1C_1,\frac{A_1B_1}{DE}=\frac{A_1C_1}{DF}.$$

将 n 边形每一对应顶点，及夹这角的两边所构成的三角形应用定理 19.2，则可得对应顶角相等，对应边成比例，故 n 边形 $DE\cdots F$ 与 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$ 及 $A_2B_2\cdots C_2$ 同向相似.

2. 爱可尔斯定理 2 的推广

定理 19.4　（如图 19-5）设 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$ 均为正三角形，D'、E'、F' 分别为 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 上的点，且 $\frac{A_1D'}{D'A_2}=\frac{B_1D'}{E'B_2}=\frac{C_1F'}{F'C_2}=\frac{m}{n}$，$D$、$E$、$F$ 分别为 A_3D'、B_3E'、C_3F' 上的点，且 $\frac{A_3D}{DD'}=\frac{B_3C}{EE'}=\frac{C_3F}{FF'}=\frac{s}{t}$，则 $\triangle DEF$ 为正三角形.

证明　由于 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 均为正三角形，由已

知及定理 19.1 得 $\triangle D'E'F'$ 为正三角形；

同理，对 $\triangle A_3B_3C_3$ 和 $\triangle D'E'F'$ 应用定理 19.1 得 $\triangle DEF$ 为正三角形.

定理 19.5 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$ 同向相似，D'、E'、F' 分别为 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2 上的点，且 $\frac{A_1D'}{D'A_2}=\frac{B_1E'}{E'B_2}=\frac{C_1F'}{F'C_2}=\frac{m}{n}$，$D$、$E$、$F$ 分别为 A_3、$D'B_3E'$、C_3F' 上的点，且 $\frac{A_3D}{DD'}=\frac{B_3D}{EE'}=\frac{C_3F}{FF'}=\frac{s}{t}$，则 $\triangle DEF$ 与原三个三角形同向相似.

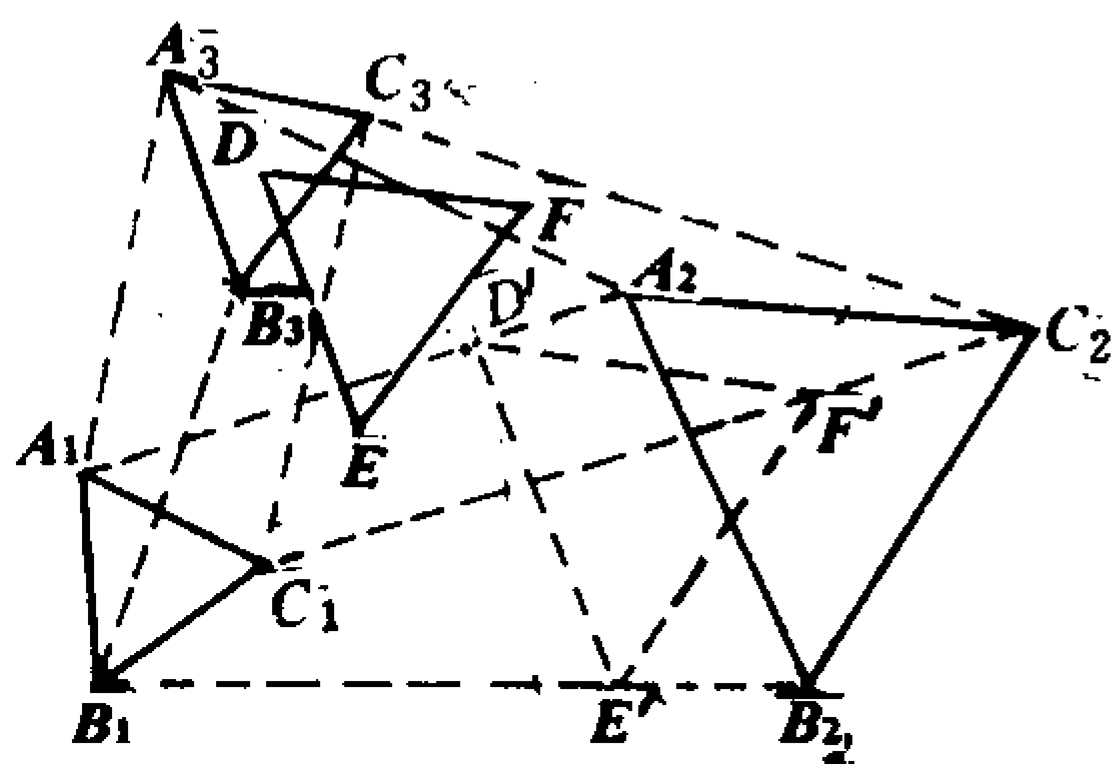


图 19-5

证明 由定理 19.2，$\triangle D'E'F'$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 同向相似；$\triangle DEF$ 与 $\triangle A_3B_3C_3$ 及 $\triangle D'E'F'$ 同向相似，故 $\triangle DEF$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$ 同向相似.

定理 19.6 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$、$A_2B_2\cdots C_2$、$A_3B_3\cdots C_3$ 同向相似，D'、E'、…、F' 分别为 A_1A_2、B_1B_2、…、C_1C_2 上的点，且 $\frac{A_1D'}{D'A_2}=\frac{B_1E'}{E'B_2}=\cdots=\frac{C_1F'}{F'C_2}=\frac{m}{n}$，$D$、$E$、$F$ 分别为 A_3D'、B_3E'、…、C_3F' 上的点，且 $\frac{A_3D}{DD'}=\frac{B_3E}{EE'}=\cdots=\frac{C_3F}{FF'}=\frac{s}{t}$，则 n 边形 $DE\cdots F$ 与 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$、$A_2B_2\cdots C_2$ 及 $A_3B_3\cdots C_3$ 同向相似.

证明 由定理 19.3，n 边形 $D'E'\cdots F'$ 与 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$ 及 $A_2B_2\cdots C_2$ 同向相似；n 边形 $DE\cdots F$ 与 n 边形 $A_3B_3\cdots C_3$ 及 $D'E'\cdots F'$ 同向相似，所以 n 边形 $DE\cdots F$ 与 n 边形 $A_1B_1\cdots C_1$、$A_2B_1\cdots C_2$、$A_3B_3\cdots C_3$ 同向相似.

§19.4 定理的应用

例 19.1 如图 19-6，$\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 均为正三角形，F、G、H 分别为 AB、CD、AE 的中点，求证：$\triangle FGH$ 为正三角形.

证明 对正 $\triangle ABC$ 和正 $\triangle EAD$ 应用爱可尔斯定理 1，即得 $\triangle FGH$ 为正三角形.

例 19.2 应用爱可尔斯定理证明拿破仑定理.

证明 如图 19-7，对正 $\triangle XCB$、正 $\triangle CYA$、正 $\triangle BAZ$，应用爱可尔斯定理 2，即得 $\triangle DEF$ 为正三角形.

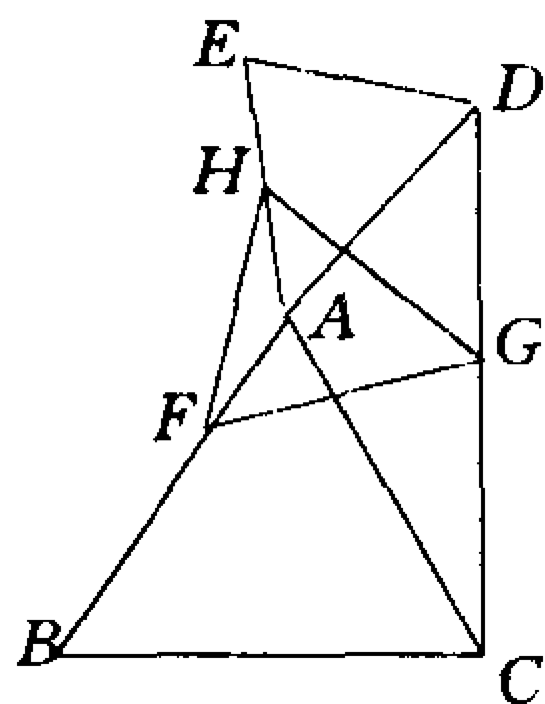


图 19-6

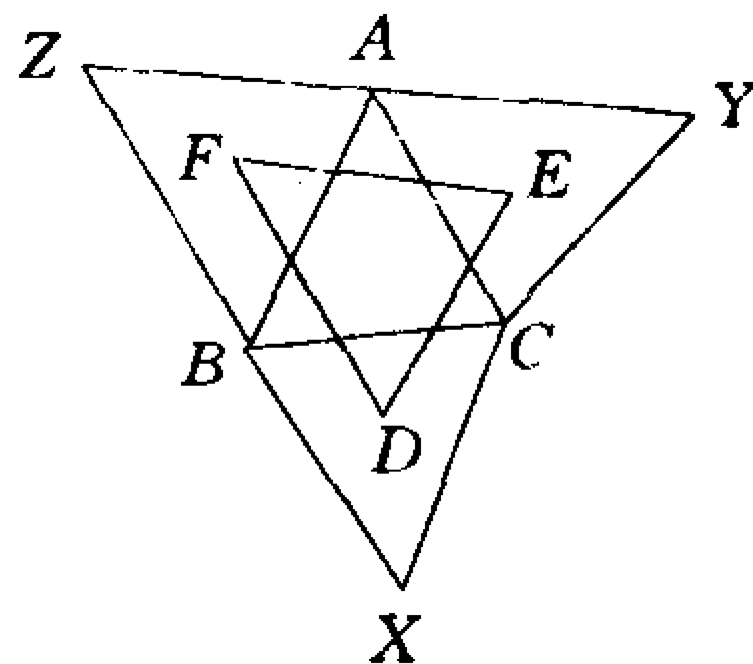


图 19-7

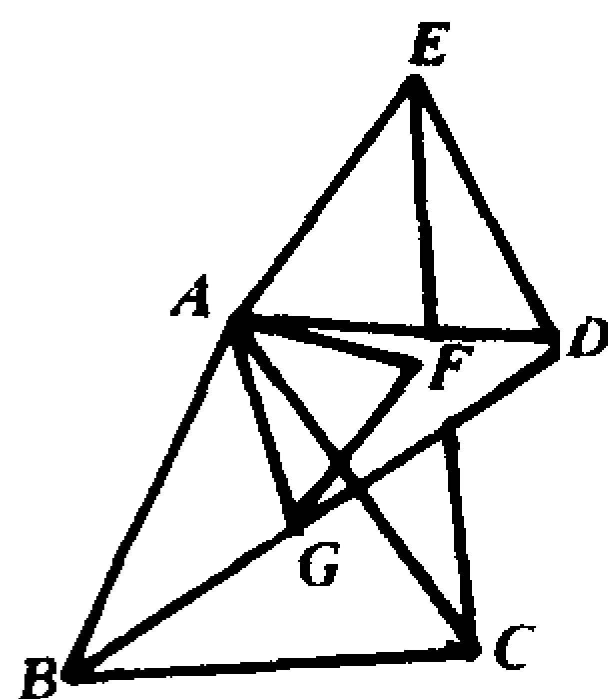
练习与思考

1. 用爱可尔斯定理证明：正三角形的中点三角形（三边中点所构成的三角形）为正三角形.

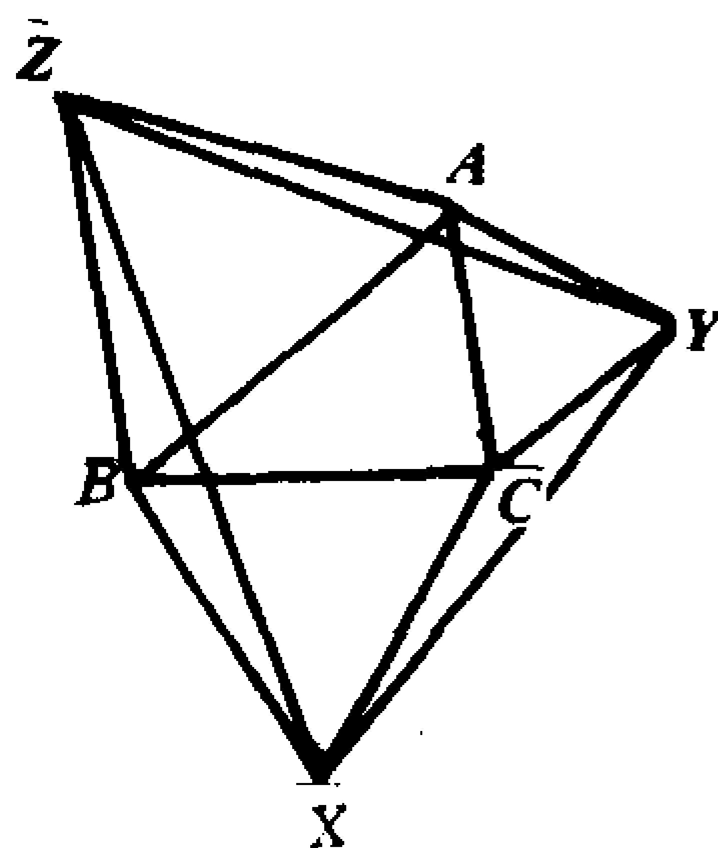
2. 如图，$\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 均为正三角形，G、F 分别为 BD、CE 的中点，求证：$\triangle AGF$ 为正三角形.

3. 分别以 $\triangle ABC$ 三边为边向三角形外作正 $\triangle ABZ$、正 $\triangle BCX$、正 $\triangle CAY$，求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle XYZ$ 有相同的重心.

4. 在以 AB、CD 分别为上、下底的等腰梯形中，对角线 AC、BD 交于 O，$AE \perp BC$，垂足为 E，$DF \perp AC$，垂足为 F. 设



（第2题）



（第3题）

G为AD的中点，当$\angle AOB = 60°$时，$\triangle EFG$具有什么特征？证明你的结论（武汉市武昌区1982年竞赛试题）.

（正三角形）

5. 以$\triangle ABC$的两边AB、AC为边向形外作正方形$ABDE$和正方形$ACFG$，若BC、EG的中点分别为P、Q，两正方形的中心分别为R、S，则四边形$PSQR$为正方形.

第二十章　莫利定理

§20.1　定　　理

莫利定理　将任意三角形的各角三等分，则与每边相邻的两条三等分分角线的交点构成一等边三角形.

这是一个令人惊讶的结果，它是欧氏几何经过几千年的锤炼之后，所能发现的为数极少的新定理之一. 莫利(F. Morley，1860～1937)是美国著名的代数几何学家. 上述定理是他于1904年给英国剑桥的一位朋友的信中提到的，20年后，才在日本发表. 在此期间，该定理再次被发现并作为问题出现在《教育时报》(Educational Times)上. 1924年莫利透露了他发现这个定理的过程. 这位英裔几何学家的最后50年是在美国度过的，但他没有放弃英国国籍. 莫利不仅是第一流的数学家，而且棋艺精湛，曾一度战胜过当时的世界冠军拉斯克尔而声誉鹊起.

1909年，一位叫纳拉尼恩加(Naraniengar)的数学家给出了这一问题的非常吸引人的证明，就初等方法而言，这个证明的简易性，到现在为止仍是首屈一指的. 这个证明在1922年由契尔德(J. M. Child)重新发现.

在例1.2(月牙定理)中我们就说过，在数学史上人们对用尺规进行几何作图表现出特别兴趣. 用尺规不可能三等分任意角的事实，使人们逐渐地不去注意涉及角的三等分线问题，这或许是这个令人赏心悦目的定理何以珊珊来迟的缘由.

§ 20.2　定理的证明

首先我们介绍纳拉尼恩加证法.

证法 1　如图 20-1. 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$,与 BC 边相邻的两条三等分分角线相交于 X, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的另两条三等分分角线相交于 S, 则 X 为 $\triangle SBC$ 的内心,从而 XS 平分 $\angle BSC$.

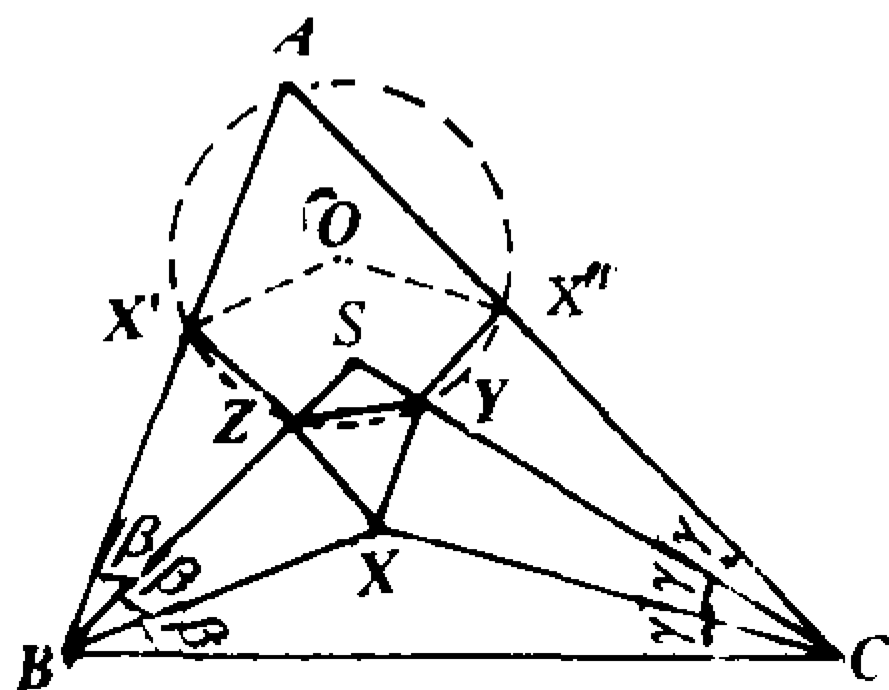


图 20-1

在 SX 两侧分别作 $\angle SXZ = \angle SXY = 30°$, Z、Y 分别在 BS、CS 上,则 $\triangle SXZ \cong \triangle SXY$,所以 $XZ = XY$.

又 $\angle ZXY = 60°$,所以 $\triangle XYZ$ 为等边三角形.

下证 AZ、AY 三等分 $\angle A$.

分别在 BA、CA 上截取 $BX' = BX$, $CX'' = CX$, 则 $\triangle BZX' \cong \triangle BZX$,从而 $ZX' = ZX = ZY$;同理有 $YX'' = ZY$,所以　$X'Z = ZY = YX''$.

且

$$\begin{aligned}\angle X'ZY &= 360° - 2\angle BZX - 60° \\ &= 360° - 2\left(\frac{\angle S}{2} + 30°\right) - 60° \\ &= 240° - \angle S \\ &= 240° - (180° - 2\beta - 2\gamma) \\ &= 60° + 2(\beta + \gamma) \\ &= 60° + 2(60° - \alpha) \\ &= 180° - 2\alpha.\end{aligned}$$

同理可证 $\angle ZYX'' = 180° - 2\alpha$.

作$\triangle X'ZY$的外接圆O，由对称性知X''也在$\odot O$上，易证圆心角$\angle X'OZ=\angle ZOY=\angle YOX''=2\alpha$，故$\angle X'OX''=6\alpha$，又因为$\angle A=3\alpha$，所以点$A$也在$\odot O$上，又弦$X'Z=ZY=YZ''$，得$AZ$、$AY$为$\angle A$的三等分线，从而命题得证.

证法 2 如图 20-2 所设，令$\angle A=3\alpha$，$\angle B=3\beta$，$\angle C=3\gamma$，$AY=m$，$AZ=n$，$CB=a$，$AB=c$，$AC=b$.

计算$\angle AZY$与$\angle BZX$的值.

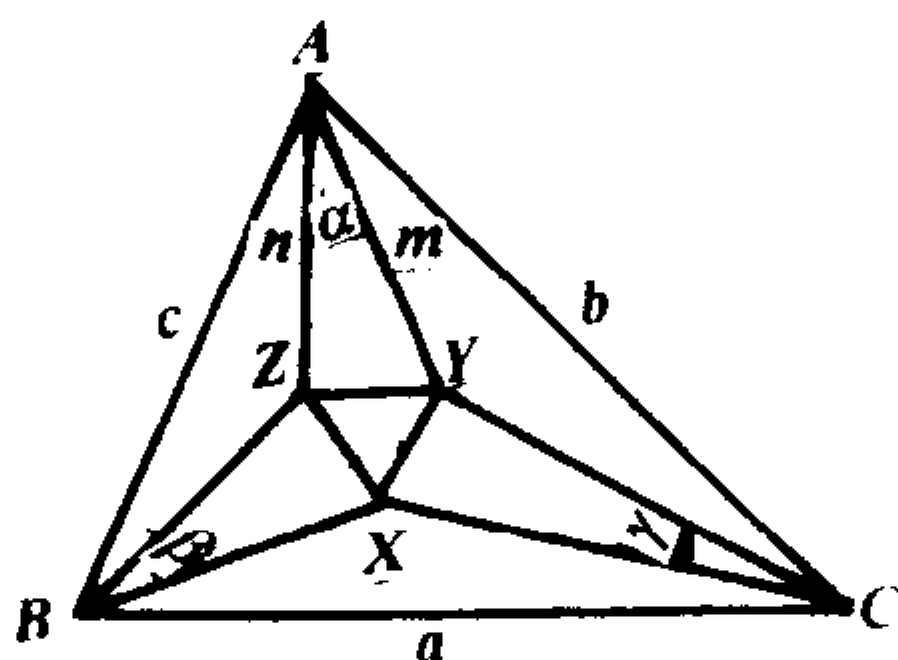


图 20-2

因为 $3\alpha+3\beta+3\gamma=180°$，

则 $\alpha+\beta+\gamma=60°$，

$\alpha+\beta=60°-\gamma$，

在$\triangle AZB$中应用正弦定理有：

$$\frac{n}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

由此

$$n=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c\sin\beta}{\sin(60°-\gamma)}.$$

类似可得 $m=\dfrac{b\sin\gamma}{\sin(60°-\beta)}$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理有

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin3\beta}{\sin3\gamma},$$

因而

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin3\beta\sin\gamma\sin(60-\gamma)}{\sin3\gamma\sin\beta\sin(60°-\beta)}.$$

应用恒等式$\sin3\beta=4\sin\beta\sin(60°+\beta)\sin(60°-\beta)$可把上式简化为

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}.$$

下面证明$\angle AZY$与$\angle AYZ$等于$60°+\beta$与$60°+\gamma$.

事实上，因为 $\alpha+\beta+\gamma=60°$，则以 $60°+\beta$、$60°+\gamma$ 和 α 为内角的三角形是存在的，设这三角形为 $\triangle A'B'C'$，则它夹角为 α 两边之比值为

$$\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}=\frac{m}{n}.$$

又因为 $\angle YAZ=\alpha$，所以 $\triangle AYZ \backsim \triangle A'B'C'$.

于是 $\angle AZY=60°+\beta$, $\angle AYZ=60°+\gamma$.

同理可证 $\angle BZX=60°+\alpha$.

因为 $\angle AZB=180°-(\alpha+\beta)=180°-(60°-\gamma)$
$=120°+\gamma$,

而 $\angle YZA+\angle AZB+\angle BZX$
$=60°+\beta+120°+\gamma+60°+\alpha=300°$,

则 $\angle XZY=60°$.

类似地可证：$\angle XYZ=\angle YXZ=60°$，从而 $\triangle XYZ$ 为等边三角形.

莫利定理还有下面的逆定理.

逆定理 （图 20-3）设任意 $\triangle ABC$ 的内角分别为 α、β、γ，在三角形内作 AZ、AY，使 $\angle ZAB=\angle YAC=k_1\alpha$；作 BZ、BX，使 $\angle ZBA=\angle XBC=k_2\beta$；作 CX、CY，使 $\angle XCB=\angle YCA=k_3\gamma$，其中 k_1、k_2、k_3 取值于区间 $(0,\frac{1}{2})$，若对于任意 $\triangle ABC$，$\triangle XYZ$ 皆为正三角形，则 $k_1=k_2=k_3=\frac{1}{3}$.

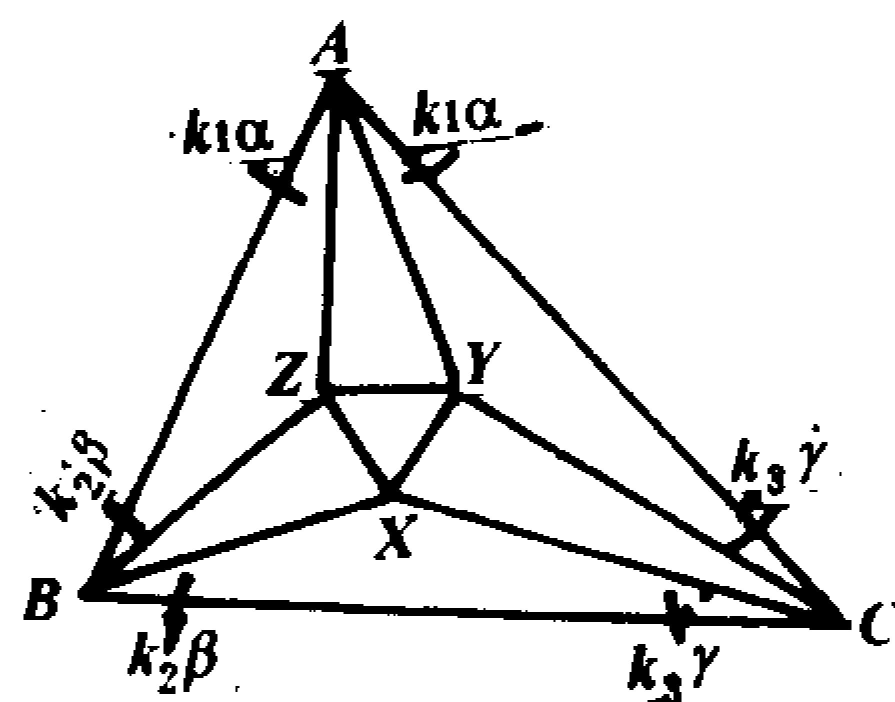


图 20-3

其证明较繁，这里略去.

§ 20.3　定理的推广

把内角平分线改为外角平分线,则有

定理 20.1　将任意三角形的三外角三等分,则与每边相邻的三等分线的交点构成一等边三角形.

证明　如图 20-4,令 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角分别为 3α、3β、3γ,则 $\alpha+\beta+\gamma=120°$,且 α、β、γ 中至少有一个不小于 $40°$,不妨设 $\alpha \geqslant 40°$,则 $\beta+\gamma \leqslant 80°$,即 $2\beta+2\gamma \leqslant 160°$ 设与 BC 相邻的两条三等分线交于 X,另两条三等分线交于 S,则 S 与 A 在 BC 两侧,且 XS 平分 $\angle S$,故

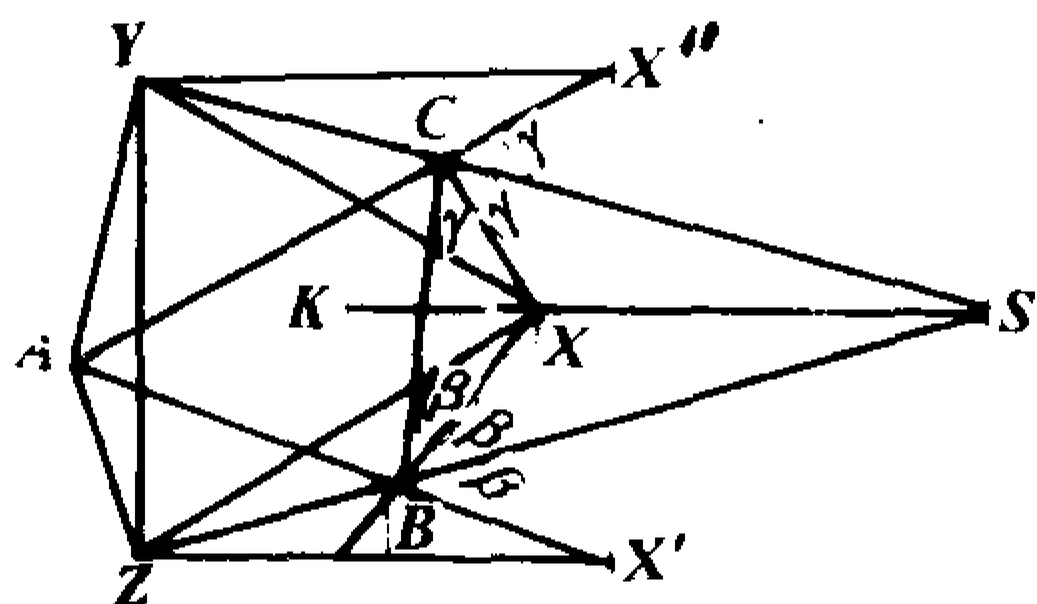


图 20-4

$$\frac{1}{2}\angle S=\frac{1}{2}(180°-2\beta-2\gamma)$$
$$=\frac{1}{2}[180°-(240°-2\alpha)]$$
$$=\alpha-30°.$$

延长 SX 至 K,在 SB、SC 上分别取点 Z、Y,使 $\angle KXZ=\angle KXY=30°$,则 $\triangle SXZ \cong \triangle SXY$,所以 $XZ=XY$,又 $\angle ZXY=60°$,故 $\triangle XYZ$ 为等边三角形.

下证 AZ、AY 为角 A 的外角的三等分线.

设点 X 关于 SB、SC 的对称点分别为 X'、X'',则 $X'Z=ZX=ZY=YX''$,

$$\angle X'ZY=\angle X''YZ=60°+2\angle SZX$$

$$= 60° + 2\left(30° - \frac{\angle S}{2}\right)$$
$$= 60° + 2(30° - \alpha + 30°) = 180° - 2\alpha.$$

同莫利定理的证法 1 一样，X'、Z、Y、X'' 内接于圆，且 $X'Z$、ZY、YX'' 所对的圆心角均为 2α.

从而优弧$\overset{\frown}{X'ZYX''}$所对的圆周角为 3α（优弧是因为 $\alpha \geqslant 40°$），

劣弧$\overset{\frown}{X'X''}$所对圆周角为 $180° - 3\alpha = \angle X'AX''$，

所以点 A 在圆上，故 $\angle ZAX' = \angle YAX'' = \alpha$.

所以　AY、AZ 为 $\angle A$ 的外角三等分线，命题得证.

定理 20.2　在任意三角形的每一内角的二条三等分线与不相邻的两外角的四条三等分线中，与每边相邻的两线的交点构成一正三角形.

证明仿上，略.

1939 年，法国数学家勒贝格(Lebesgus，1875 ～ 1941 年)在一篇论文中指出，在三角形所有三等分线的交点中，可以指出 27 个点，它们都是等边三角形的顶点.

练习与思考

1. 设三角形的三个内角是 3α、3β、3γ，外接圆半径是 R，则三内角的三等分线所交的正三角形边长是 $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

2. 证明定理 20.2.

第二十一章　蝴蝶定理

§21.1　定　　理

蝴蝶定理　过圆中 AB 弦的中点 M 引任意两弦 CD 和 EF，连结 CF 和 ED 分别交 AB 于 P、Q，则 $PM = MQ$.

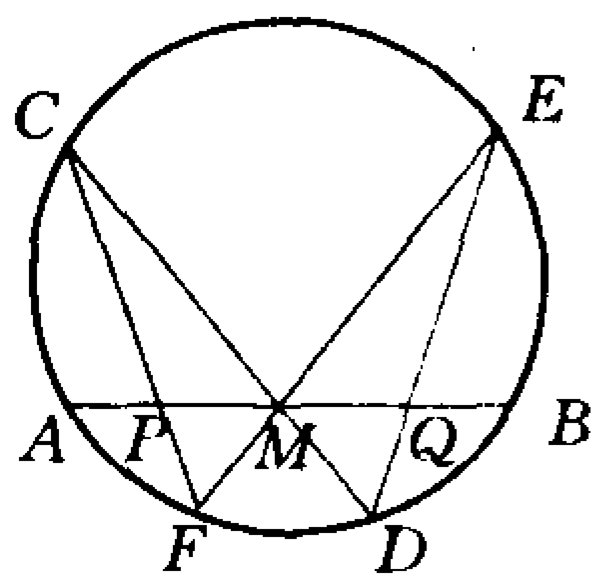


图 21-1

因为该定理的图形(如图 21-1)象只翩翩起舞的蝴蝶，故因此而得名. 这一问题最先出现在 1815 年英国一本通俗杂志“男士日记”的问题征解栏上. 第一个证明由一位叫霍纳(Horner)的英国人于同一年给出，但十分繁琐. 由于它的美丽图形和所包含的深刻意义，引起人们广泛的兴趣. 但在 1972 年以前，人们都把它看成是一个著名的几何难题，因为在这之前，所给出的证明都比较复杂，或并非初等的. 难怪 1972 年艾维斯在他的《几何概观》中写道“如果限用高中几何知识的话，这的确是一个棘手的问题.”

但是，1973年，一位叫斯特温(Steven)的中学教师给出了一个漂亮的初等证明. 1983 年，中国科技大学的单墫博士又给出了一个简捷的解析证明，这些年来研究者不乏其人，培使得这只翩翩起舞的蝴蝶栖止不定，变化多端.

§21.2　定理的证明

下面的证法 1 是斯特温给出的.

证法 1 （构造恒等式法）由图 21-2 知，有四对相等的角 α、β、γ、δ，若设 $PM=x$，$MQ=y$，$AM=MB=a$，则有

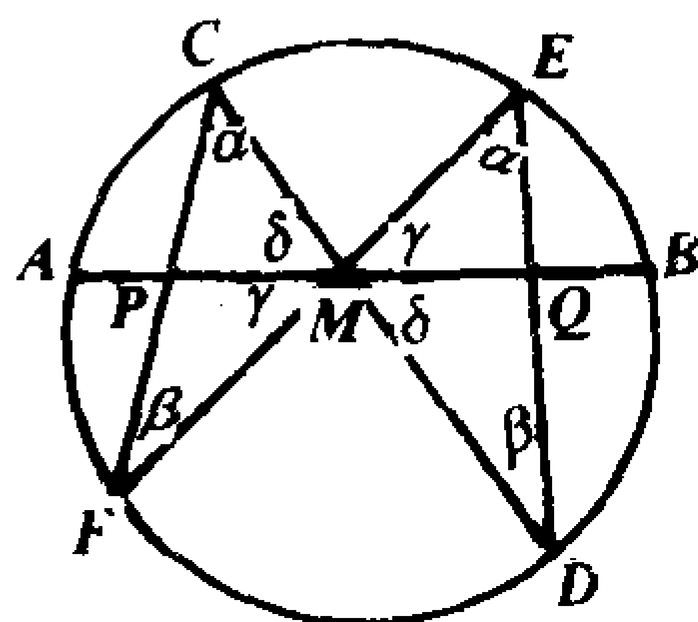


图 21-2

$$\frac{S_{\triangle CMP}}{S_{\triangle QEM}}\cdot\frac{S_{\triangle QEM}}{S_{\triangle PFM}}\cdot\frac{S_{\triangle PFM}}{S_{\triangle QMD}}\cdot\frac{S_{\triangle QMD}}{S_{\triangle CMP}}=1.$$

即 $$\frac{CM\cdot CP\sin\alpha}{EM\cdot EQ\sin\alpha}\cdot\frac{EM\cdot MQ\sin\gamma}{FM\cdot PM\sin\gamma}\cdot\frac{FP\cdot FM\sin\beta}{DM\cdot DQ\sin\beta}\cdot\frac{MQ\cdot DM\sin\delta}{PM\cdot CM\sin\delta}=1.$$

化简得 $$CP\cdot FP\cdot(MQ)^2=EQ\cdot DQ\cdot(PM)^2.$$

由相交弦定理知

$$CP\cdot FP=AP\cdot PB=(a-x)(a+x)=a^2-x^2,$$

$$EQ\cdot DQ=AQ\cdot QB=(a+y)(a-y)=a^2-y^3.$$

所以有 $$(a^2-x^2)y^2=(a^2-y^2)x^2\Rightarrow x^2=y^2.$$

因为 x、y 都大于零，上式仅在 $x=y$ 时成立，即是

$$PM=MQ.$$

证法 2 （反证法）仍采用前面的记号，假设 $QM<PM$，也即 $x>y$，则有 $a^2-x^2<a^2-y^2$，即 $AP\cdot PB<AQ\cdot QB$，于是 $CP\cdot FP<EQ\cdot DQ$，据正弦定理有

$$CP=\frac{\sin\delta}{\sin\alpha}PM,FP=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}PM,$$

$$EQ=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}MQ,DQ=\frac{\sin\delta}{\sin\beta}MQ.$$

代入最后一个不等式就有 $PM^2<MQ^2$，这与假设 $PM>QM$ 矛盾，故不可能有 $PM>QM$. 同理也不可能有 $PM<QM$.

所以 $PM=MQ$.

证法 3 （计算法）如图 21-3，过点 P 作 $PH\perp EF$，$PG\perp CD$，H、G 为垂足，过点 Q 作 $QK\perp CD$，$QL\perp EF$，K、L 为垂

足，其它同上所设.

则有 $\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{PG}{QK}=\dfrac{PH}{QL}.$

从而 $\quad \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{PG\cdot PH}{QK\cdot QL}=\dfrac{PG}{QL}\cdot\dfrac{PH}{QK}.$

但 $\quad \dfrac{PG}{QL}=\dfrac{CP}{EQ},\dfrac{PH}{QK}=\dfrac{PF}{QD}.$

故有 $\quad \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{CP\cdot PF}{EQ\cdot QD}=\dfrac{AP\cdot PB}{AQ\cdot QB}$

$$=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}.$$

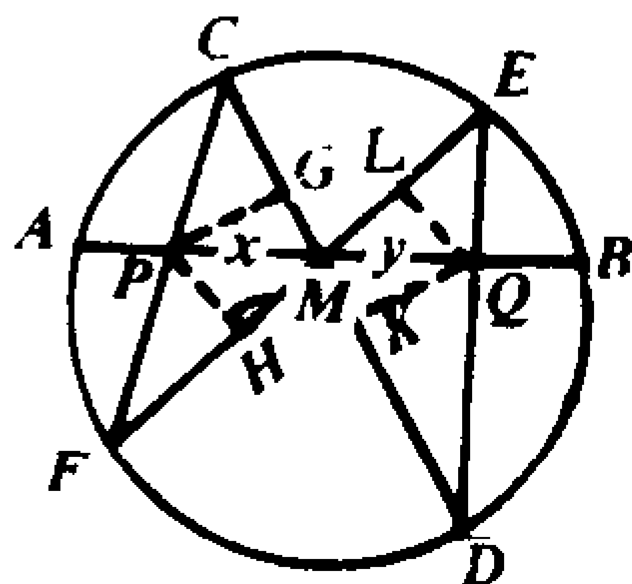


图 21-3

于是 $x=y$，即 $PM=QM$.

证法 3 是加拿大的考克塞特(Coxeter) 教授给出的. 下面给出另一个初等证明.

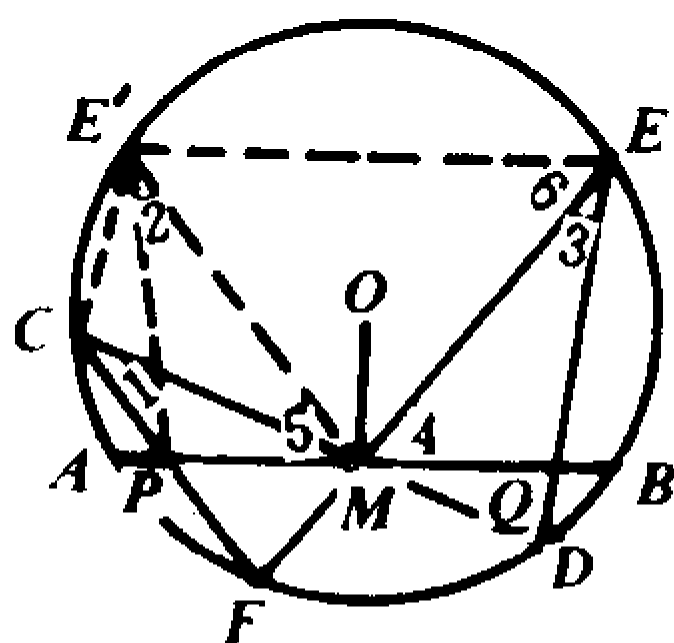


图 21-4

证法 4 （综合法）如图 21-4，作 E 关于 OM 的对称点 E'，连结 PE'、$E'M$、$E'C$，则 $EM=E'M$.

因为 $\quad \angle 5=\angle 4=\angle 6$，

所以 $\quad \angle 5+\angle E'CP=\angle 6+\angle E'CP=180°$.

故 E'、C、P、M 四点共圆. 从而 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$. 进一步有

$\triangle E'PM\cong\triangle EQM$，

故 $PM=QM$.

最后，我们介绍一个漂亮的解析证法，这就是前面提及的原中国科技大学单墫博士所给出的证明.

证法 5 （解析法）如图 21-5 建立坐标系，则圆的方程为：

$x^2+(y+m)^2=R^2$，

直线 CD 的方程：$y=k_1x$，

直线 EF 的方程：$y = k_2x$.

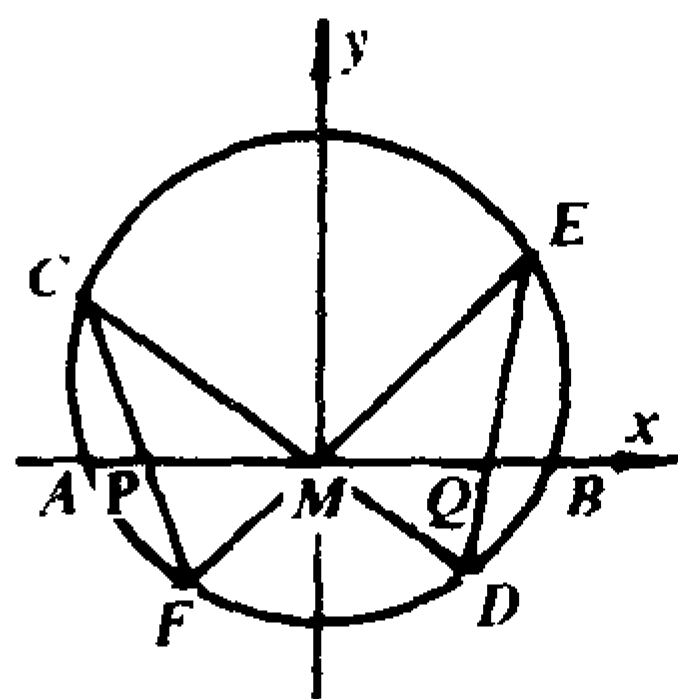


图 21-5

由于圆和两相交直线组成的二次曲线系为

$$\mu[x^2 + (y + m)^2 - R^2] + \lambda(y - k_1x)(y - k_2x) = 0,$$

令 $y = 0$，知 P 点和 Q 点的横坐标满足二次方程

$$(\mu + \lambda k_1k_2)x^2 + \mu(m^2 - R^2) = 0.$$

由于一次项系数为零，

所以　两根 x_1 与 x_2 之和为零.

即　$x_1 = - x_2$，

所以　$PM = QM$.

当然还有不等式法、面积法、三角法、极坐标法等多种方法，在此不一一介绍.

逆定理　设 AB、CD、EF 是交于一点 M 的圆 O 的三条不同的弦，CF、ED 交 AB 于 P、Q 两点，若 $PM = QM$，则 M 平分 AB.

证明　如图 21-2 所设. 仍采用证法 1 中的恒等式，有

$$\frac{CM \cdot CP\sin\alpha}{EM \cdot EQ\sin\alpha} \cdot \frac{EM \cdot MQ\sin\gamma}{FM \cdot PM\sin\gamma} \cdot \frac{FP \cdot FM\sin\beta}{DM \cdot DQ\sin\beta} \cdot \frac{MQ \cdot DM\sin\delta}{PM \cdot CM\sin\delta} = 1.$$

得　$CP \cdot FP \cdot MQ^2 = EQ \cdot DQ \cdot PM^2$,

因为　$PM = QM$,

所以　$CP \cdot FP = EQ \cdot DQ$.

又因为　$CP \cdot FP = AP \cdot PB$.

$EQ \cdot DQ = AQ \cdot QB$.

所以 $AP \cdot PB = AQ \cdot QB.$

即 $(AM - PM)(MB + PM)$

$= (AM + MQ)(MB - MQ).$

化简即得 $AM = MB.$

§21.3 定理的引伸与推广

首先容易想到的是，如果连 CE、DF 分别与 AB 延长线交于 Q'、P'，是否仍有 $MQ' = MP'$ 呢？回答是肯定的，这即是

定理 21.1 过圆的 AB 弦中点 M 任意引弦 CD 和 EF，连接 CE 和 DF 交 AB 的延长线于 Q'、P'，则 $P'M = Q'M$.

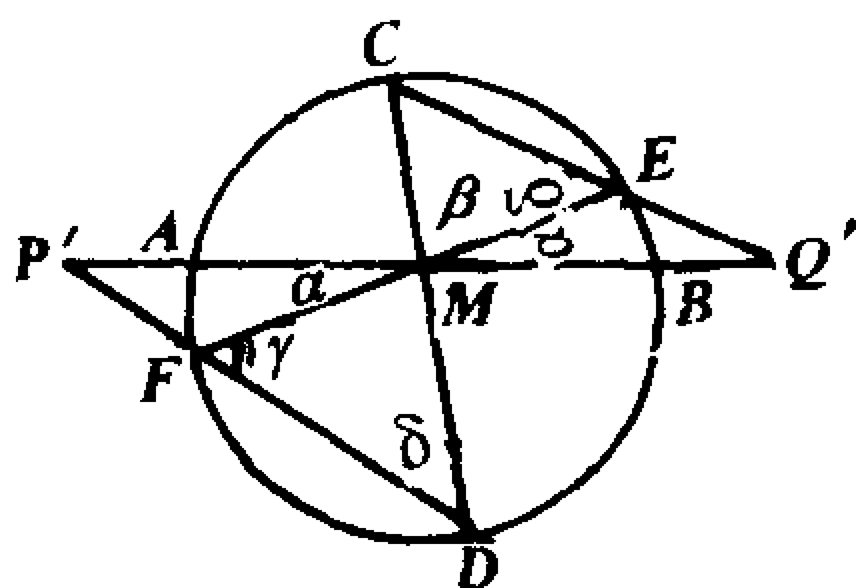


图 21-6

证明 如图 21-6，有

$$\frac{S_{\triangle MEQ'}}{S_{\triangle MFP'}} \cdot \frac{S_{\triangle MFP'}}{S_{\triangle MCQ'}} \cdot \frac{S_{\triangle MCQ'}}{S_{\triangle MDP'}} \cdot \frac{S_{\triangle MDP'}}{S_{\triangle MEQ'}} = 1.$$

即 $$\frac{ME \cdot MQ'\sin\alpha}{MF \cdot MP'\sin\alpha} \cdot \frac{MF \cdot P'F\sin\gamma}{CM \cdot CQ'\sin\gamma} \cdot \frac{MC \cdot MQ'\sin\beta}{MP' \cdot MD\sin\beta} \cdot \frac{DM \cdot DP'\sin\delta}{EM \cdot EQ'\sin\delta} = 1.$$

得 $MQ'^2 \cdot P'F \cdot DP' = MP'^2 \cdot CQ' \cdot EQ'.$

设 $P'M = x$、$MQ' = y$、$AM = MB = a$，

则依割线定理，有 $P'F \cdot P'D = P'A \cdot P'B = x^2 - a^2$，

同理 $Q'C \cdot Q'E = y^2 - a^2$，

得 $y^2(x^2 - a^2) = x^2(y^2 - a^2).$

因 x、y 均大于 0，故有 $x = y$，即 $P'M = Q'M.$

若将 AB 移到圆外，则有

定理 21.2 AB 为 $\odot O$ 外一直线，$OM \perp AB$ 于 M，过 M 任作两条割线 CD、EF，CF 与 ED 分别与 AB 交于 P、Q，则

$$PM = QM.$$

略证 如图 21-7，作 E 关于 OM 的对称点 E'，连 $E'M$、$E'P$、$E'C$，易证 $\triangle QEM \cong \triangle PE'M$，从而 $PM = QM$.

对中点 M 推广，可得

定理 21.3 如图 21-8，设 AB 是 $\odot O$ 内一条弦，过 AB 上一点 M 任作两弦 CD、EF，设 CF、ED 交 AB 于 P、Q，并设 $AM = a$，$BM = b$，$PM = x$，$QM = y$，则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

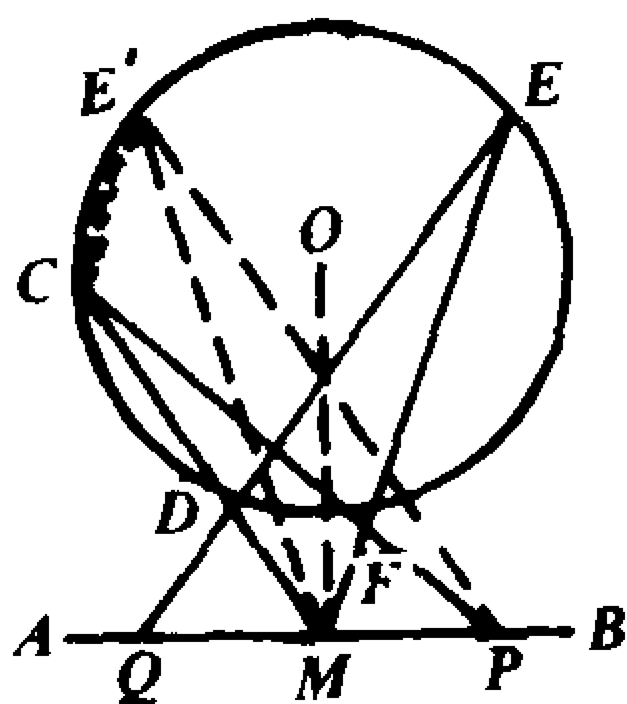


图 21-7

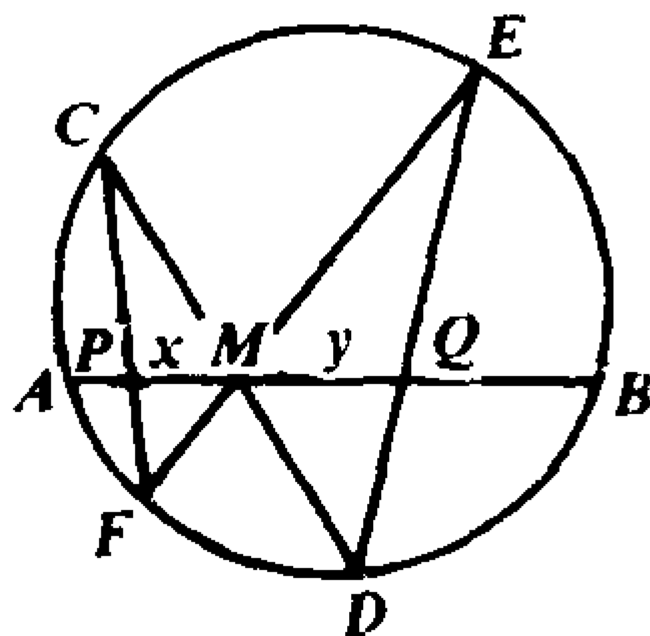


图 21-8

证明 由证法 1 中的等式有

$$CP \cdot FP \cdot MQ^2 = EQ \cdot DQ \cdot PM^2.$$

从而有

$$(a - x)(b + x)y^2 = (a + y)(b - y)x^2,$$

展开化简得

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

显然，当 M 为 AB 中点时，$a = b$，有 $x = y$ 为蝴蝶定理.

将弦 CD、EF 的交点移至 AB 外还有

定理 21.4 M 为圆内弦 AB 的中点，过圆内一点 G 引两

条弦 CD 和 EF，分别交 AB 于 H、K，使得 $HM = MK$，连结 CF 和 ED，分别交 AB 于 P、Q，那么 $PM = MQ$.

证明 如图 21-9 所设，$PM = x$，$MQ = y$，$AM = MB = a$，$HM = MK = b$，

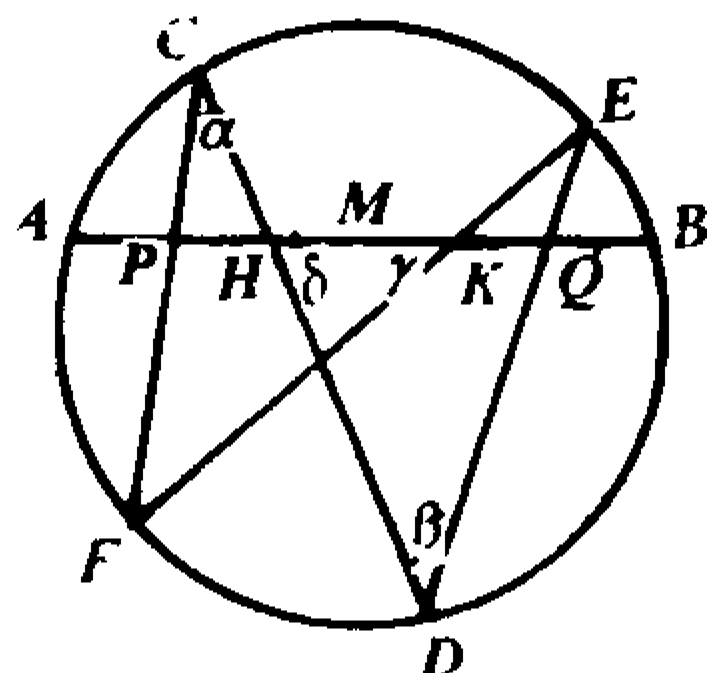


图 21-9

仿证法 1 有 $\dfrac{CH \cdot CP\sin\alpha}{EK \cdot EQ\sin\alpha} \cdot \dfrac{EK \cdot KQ\sin\gamma}{PK \cdot KF\sin\gamma} \cdot \dfrac{FP \cdot FK\sin\beta}{DQ \cdot DH\sin\beta} \cdot \dfrac{HQ \cdot HD\sin\delta}{HC \cdot HP\sin\delta} = 1.$

化简得 $CP \cdot KQ \cdot FP \cdot HQ = EQ \cdot PK \cdot DQ \cdot HP.$

所以有 $CP \cdot FP \cdot (y^2 - b^2) = EQ \cdot DQ(x^2 - b^2).$

又 $CP \cdot FP = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2,$

$EQ \cdot DQ = (a + y)(a - y) = a^2 - y^2.$

所以 $(a^2 - x^2)(y^2 - b^2) = (a^2 - y^2)(x^2 - b^2).$

展开化简得 $y^2(a^2 - b^2) = x^2(a^2 - b^2).$

因为 $x > 0, y > o, a^2 - b^2 \neq 0$

故 $x = y$，即有 $PM = MQ.$

向圆锥曲线推广，可得

定理 21.5 设 M 为圆锥曲线 Γ 的弦 AB 上一点，过 M 任作两弦 CD、EF、过 C、F、D、E 的任一圆锥曲线与 AB 交于 P、Q，设 $AM = a$，$BM = b$，$MP = p$，$MQ = q$，则

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

证明 建立如图 21-10 所示的坐标系，则 M、B 的坐标分别为 $(a,0)(a + b,0)$；圆锥曲线 Γ，直线 CD、EF 的方程分别为：

$\Gamma: x^2 + cxy + dy^2 - (a+b)x + ey = 0,$

$CD: y = k_1(x-a),$

$EF: y = k_2(x-a).$

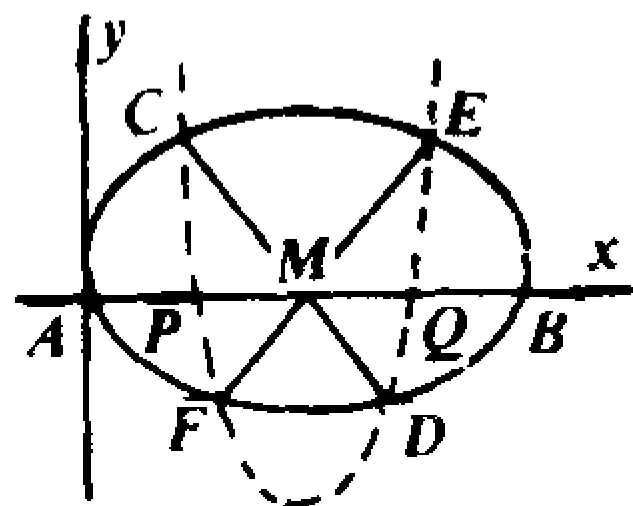


图 21-10

从而过点C、D、E、F的二次曲线束方程为

$$x^2 + cxy + dy^2 - (a+b)x + ey + \lambda(k_1x - y - k_1a)\cdot(k_2x - y - k_2a) = 0.$$

设P、Q两点的横坐标分别为x_1、x_2，则x_1、x_2应满足方程

$$x^2 - (a+b)x + \lambda(k_1x - k_1a)(k_2x - k_2a) = 0.$$

即 $$(1 + \lambda k_1k_2)x^2 - (a + b + 2\lambda ak_1k_2)x + k_1k_2a^2\lambda = 0.$$

因此$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{a - x_1} - \frac{1}{x_2 - a} = \frac{1}{a - x_1} + \frac{1}{a - x_2}$$

$$= \frac{2a - (x_1 + x_2)}{a^2 - (x_1 + x_2)a + x_1x_2}$$

$$= \frac{2a - \dfrac{a + b + 2\lambda ak_1k_2}{1 + \lambda k_1k_2}}{a^2 - \dfrac{a + b + 2\lambda k_1k_2}{1 + \lambda k_1k_2}a + \dfrac{k_1k_2a^2\lambda}{1 + \lambda k_1k_2}}$$

$$= \frac{2a - (a+b)}{a^2 - (a+b)a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

特别地，当M为AB中点时有

定理21.6 设M为圆锥曲线Γ的弦AB的中点，边M任作两弦CD、EF，过C、D、E、F的任一圆锥曲线与AB交于P、Q，则$PM = QM$.

如果取一条凸闭曲线的任一弦AB，通过AB的中点M任作两弦CD和EF，设线段ED、CF分别交AB于Q、P，总有$PM = QM$，我们就说这条凸闭曲线具有“蝴蝶性质”. 1969

年，查克里恩等三位几何学家还得出：

定理 21.7 任何具有蝴蝶性质的凸闭曲线必定是椭圆.

定理的证明超过了中学几何的范围，我们略去.

练习与思考

1. 设 AB 为 $\odot O$ 的直径，P 在过 A 的切线上，过 P 作割线交 $\odot O$ 于 C、D，直线 BC、BD 分别与 PO 相交于 E、F，则 $EO = OF$.

2. P、Q 在过圆心 O 的直线上，且 $PO = OQ$，过 P 作割线交圆于 C、D，过 Q 作割线交圆于 A、B，AC、BD 分别交 PQ 于 E、F. 则 $EO = OF$.

3. 设 O_1 为一条弦的中点，P、Q 在这弦所在直线上，并且 $PO_1 = O_1Q$，过 P 作割线交圆于 C、D，过 Q 作割线交圆于 A、B，AC、BD 分别交 PQ 于 E、F，则 $EO_1 = O_1F$.

第二十二章　西姆松定理

§22.1　定　　理

西姆松定理　过三角形外接圆上任意一点作三边的垂线,则三垂足共线.

这条直线习惯地被称为该点关于三角形的西姆松线.

罗伯特·西姆松(R. Simson,1687～1768年)是英国数学家.他在几何学和算术方面都有一些贡献,作为希腊数学的信徒,他曾于1756年校订过欧几里得的《几何原本》.但是,要想从他的著作中发掘出上述定理却是徒劳的.据玛开(Machay)考证,西姆松定理实际是1797年由瓦拉斯(W·Wallace)发现的,但只因这种通称既久,故仍沿袭至今.

§22.2　定理的证明

如图22-1,P为$\triangle ABC$外接圆上任意一点,过P作BC、AC、AB的垂线,垂足分别为D、E、F,连PA、PB、PC.

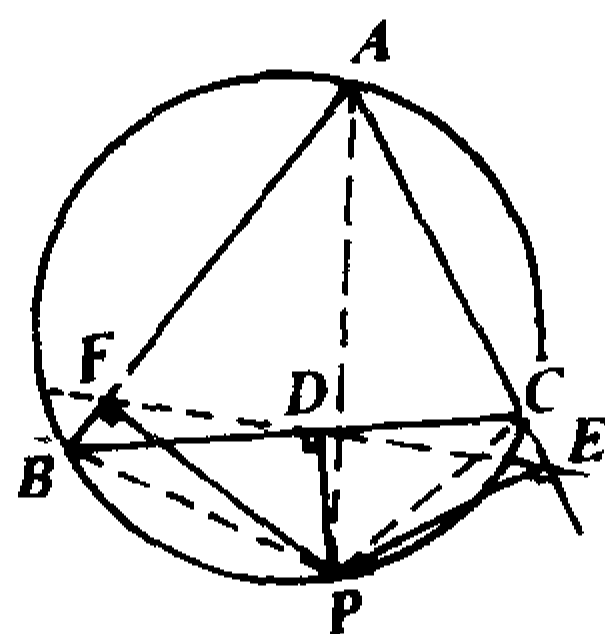


图22-1

证法1　因为　P、B、F、D及P、D、C、E分别共圆.

所以　$\angle PDF+\angle PBF=180°$,

又　$\angle PDE=\angle PCE=\angle PBF$,

所以　$\angle PDF+\angle PDE=180°$.

故　D、E、F三点共线.

证法 2　因为　P、B、F、D 及 P、E、A、F 分别共圆，

所以 $\angle PFD = \angle PBD = \angle PAC = \angle PFE$.

故 D、E、F 三点共线.

这直线 叫做点 P 关于 $\triangle ABC$ 的西姆松线.

西姆松定理的逆命题也成立.

逆定理　若一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点在此三角形的外接圆上.

证明　如图 22-1，因为 $PD \perp BC$、$PE \perp AC$、$PF \perp AB$，

所以　P、B、F、D 及 P、F、A、E 分别共圆.

又　F、D、E 三点共线.

所以　$\angle PBC = \angle PFD = \angle PFE = \angle PAE = \angle PAC$.

故 P、A、B、C 四点共圆. 逆定理得证.

§22.3　定理的引伸与推广

1. 改垂线为斜线

定理 22.1　过 $\triangle ABC$ 外接圆上一点 P，向三边所在直线引斜线分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F，且 $\angle PDB = \angle PEC = \angle PFB$，则 D、E、F 共线.

证明　如图 22-2，

因为　$\angle PDB = \angle PFB$，

所以　B、P、D、F 四点共圆；

又　$\angle PFB = \angle PEA$，

因为　P、F、A、E 四点共圆.

所以　$\angle PFD = \angle PBD = \angle PBC = \angle PAE = \angle PFE$. 故 F、D、E 共线.

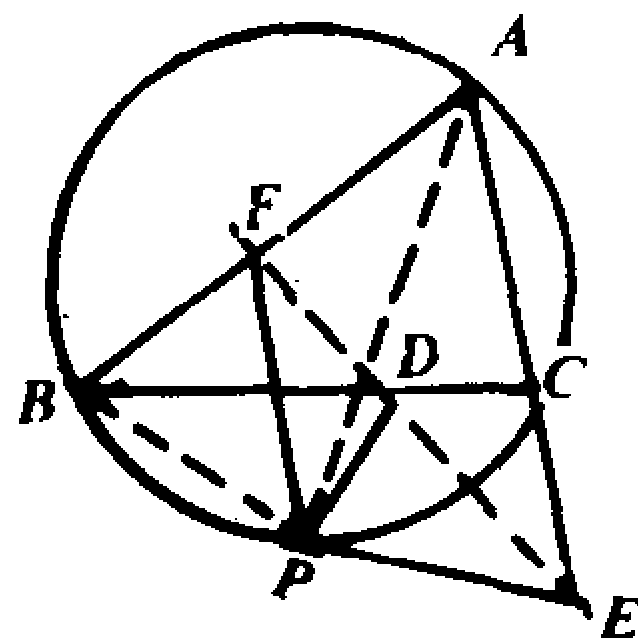


图 22-2

同样可证明，其逆命题也成立.

据说此定理是卡诺(L. N. M. Carnot, 1753～1823年)发现的，卡诺是法国军事技术家、政治家，他的《位置几何学》和《横截线论》对近代综合几何的基础作过有价值的贡献. 以发现热力学第二定律著称的卡诺是其长子.

定理 22.2 过 $\triangle ABC$ 的三顶点引互相平行的三平行线，它们和 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点分别为 A'、B'、C'. 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上何取一点 P，设 PA'、PB'、PC' 与 BC、CA、AB 或其延长线分别交于 D、E、F，则 D、E、F 共线.

证明 如图 22-3，

因为 $\angle PCE = \angle A'$，

又 $AA' \parallel BB'$，

所以 $\angle A' = \angle BGD$，

则 $\angle PCE = \angle BGD$，

又 $\angle CBB' = \angle CPB'$，

所以 在 $\triangle BGD$ 与 $\triangle PCE$ 中，

有

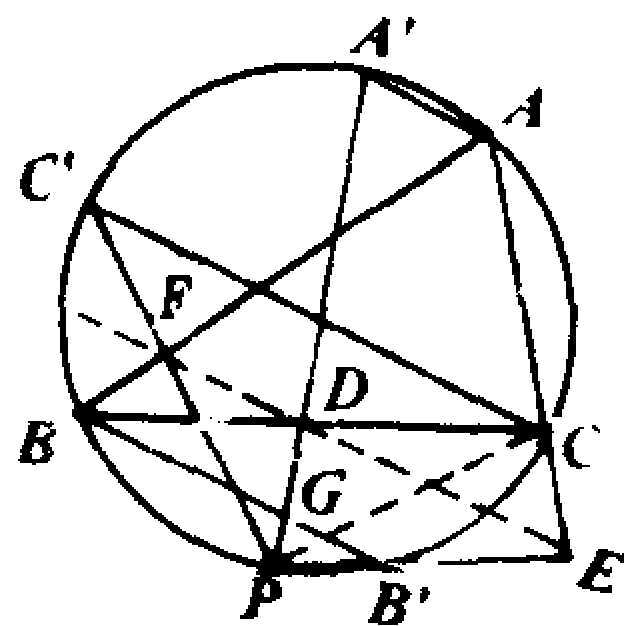


图 22-3

$\angle BDP = \angle CEP$.

从而 D、P、E、C 四点共圆.

$\angle PDE = \angle PCE = \angle A'$. 故 $AA' \parallel DE$.

同理可证，$AA' \parallel DF$. 所以 D、E、F 共线.

可以证明，当 $PA' \perp BC$ 时，定理 22.2 就成为西姆松定理.

2. 对点 P 推广

定理 22.3 设 P、Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆上异于 A、B、C 的任意两点，P 点关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 U、V、W，QU、QV、QW 和 BC、CA、AB 分别交于 D、E、F，则 D、E、F 共线.

证明　如图 22-4，

因为 $\angle PCE=\angle PBA$，

所以 $\angle PCV=\angle PBW$.

又 $\angle PCQ=\angle PBQ$，

所以$\angle QCV=\angle QBW$.

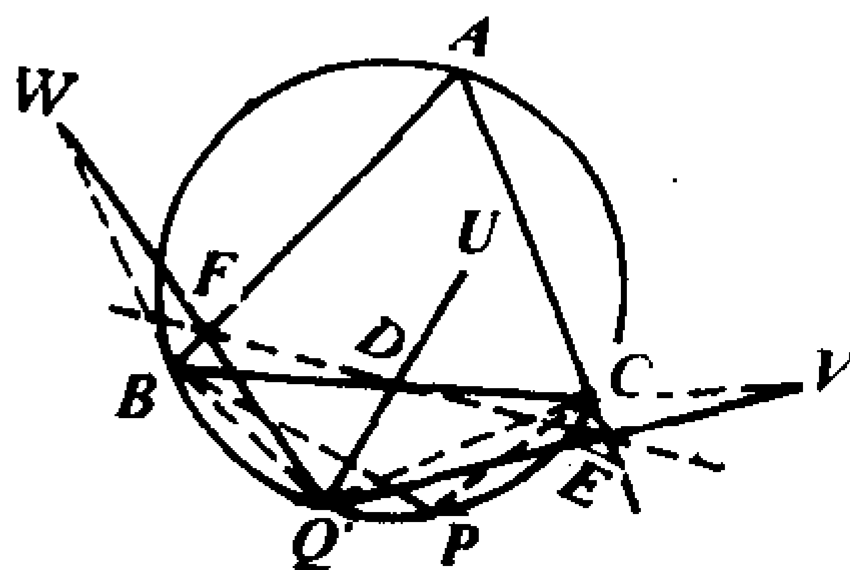


图 22-4

从而有

$$\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}}=\frac{VC\cdot QC}{WB\cdot QB}=\frac{PC\cdot QC}{PB\cdot QB},$$

同理　$\dfrac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}}=\dfrac{PA\cdot QA}{PC\cdot QC}$，　$\dfrac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}}=\dfrac{PB\cdot QB}{PA\cdot QA}$.

于是　$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}}\cdot\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}}\cdot\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QBW}}$$

$$=\frac{PB\cdot QB}{PC\cdot QC}\cdot\frac{PC\cdot QC}{PA\cdot QA}\cdot\frac{PA\cdot QA}{PB\cdot QB}=1.$$

由梅氏定理的逆定理，得 D、E、F 共线.

显然，当 P、Q 重合时为西姆松定理.

据传此定理是日本的清宫正雄于 1926 年发表的，据说他当时只有 16 岁.

定理 22.4　若 P、Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径或延长线上两点，$OP\cdot OQ=R^2$. O 为外心，R 为半径，P 关于 BC、CA、AB 的对称点分别为 U、V、W，QU、QV、QW 分别交 BC、CA、AB 于 D、E、F，则 D、E、F 共线.

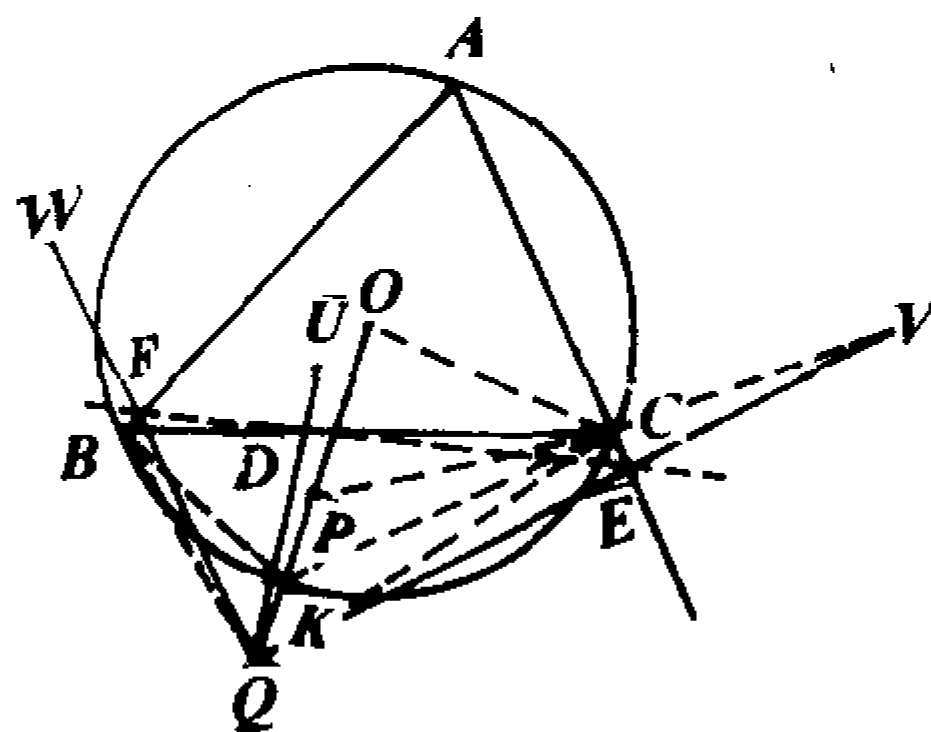


图 22-5

证明　如图 22-5. 连 OC，

则　$OP\cdot OQ=OC^2$.

又　$\angle POC=\angle COQ$，

所以 $\triangle OPC \backsim \triangle OCQ.$

$\angle OCP = \angle OQC.$

设 OQ 与 $\odot O$ 交于 K，则

$$\angle OKC = \angle OCK.$$

$$\text{又}\quad \left.\begin{array}{l}\angle OKC = \angle OQC + \angle KCQ\\ \angle OCK = \angle OCP + \angle KCP\\ \angle CCP = \angle CQC\end{array}\right\} \Rightarrow \angle PCK = \angle KCQ.$$

所以 $\angle OCV = 2\angle OCE,$

同理 $\angle QBW = 2\angle KBA.$

又 $\angle KCE = \angle KBA,$

所以 $\angle QCV = \angle QBW.$

所以 $$\frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QBW}} = \frac{CV \cdot CQ}{QB \cdot WB} = \frac{PC \cdot QC}{PB \cdot QB}.$$

同理有 $$\frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QCU}} = \frac{PA \cdot QA}{PC \cdot QC},\quad \frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QAV}} = \frac{PB \cdot QB}{PA \cdot QA}.$$

所以 $$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{S_{\triangle QBU}}{S_{\triangle QCU}} \cdot \frac{S_{\triangle QCV}}{S_{\triangle QAV}} \cdot \frac{S_{\triangle QAW}}{S_{\triangle QBW}} = 1.$$

故 D、E、F 共线.

显然，当 P(或 Q) 在圆周上时，此定理即为西姆松定理.

3. 向圆内接多边形推广

为给出西姆松定理向圆内接多边形的推广，我们先给出 n 阶垂足多边形的定义.

定义 由多边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 所在的平面上一点 P，向多边形的各边 A_1A_2、A_2A_3、…、A_nA_1 作垂线，设垂足为 B_1、B_2、…、B_n，则称多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 为 P 点关于多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的一阶垂足多边形(简称垂足多边形).

由 P 再作 $B_1B_2\cdots B_n$ 各边的垂线，设垂足为 C_1、C_2、…C_n，则多边形 $C_1C_2\cdots C_n$ 称为点 P 关于多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的二阶垂

足多边形.

… 依此类推，可定义点 P 关于多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 阶垂足多边形.

定理 22.5 设 P 与四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的四个顶点同在一个圆周上，则点 P 关于四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的二阶垂足四边形的四个顶点在同一直线上.

证明 如图 22-6，连 A_1A_3，过 P 作 A_1A_3 的垂线，垂足为 Q，由题设知

点 P 关于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的西姆松线为 B_1B_2Q，同样，点 P 关于 $\triangle A_1A_3A_4$ 的西姆线为 B_3QB_4.

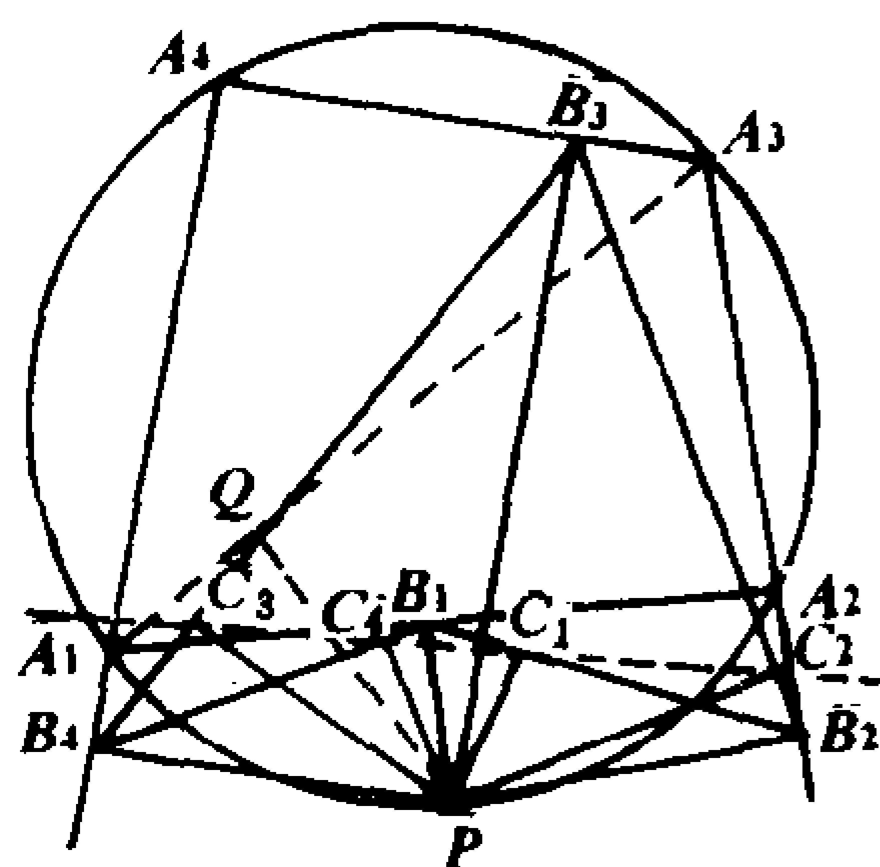


图 22-6

因为 $\angle A_1B_4P = \angle A_1QP = \angle A_1B_1P = 90°$，

所以点 P 在 $\triangle QB_1B_4$ 的外接圆上，由西姆松定理，点 P 在 $\triangle QB_1B_4$ 三边上的垂足 C_1、C_3、C_4 共线；

同理可证 C_1、C_2、C_4 也共线.

故 C_1、C_2、C_3、C_4 四点共线.

这条直线叫做点 P 关于 $A_1A_2A_3A_4$ 的西姆松线.

更一般地有

定理 22.6 若 P 与 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的所有顶点在同一圆周上，则 P 点关于 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 $(n-2)$ 阶垂足 n 边形的 n 个顶点共线.

显然当 $n=3$ 时为西姆松定理. 这一定理还可采用复数方法和极坐标方法来证明. 我国安徽的程李强，1984 年在读初中时发现了它. 并给出了 $n=4$、5 时的平面几何证明.

天津的杨世明老师，借助于笛氏坐标系，还把西姆松定理中圆上的点向任意点推广，得到

定理 22.7 设 $\triangle ABC$ 三边的方程分别为：$a_i x + b_i y + c_i = 0$，$i = 1,2,3$，则由平面上的任一点 $P(x, y)$ 向三边引垂线所得的垂足三角形的面积

$$S = k \cdot |f(x, y)|.$$

其中，$f(x, y)$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆的方程.

$$k = \frac{|a_1^2 b_2 b_3 \triangle_1 + a_2^2 b_3 b_1 \triangle_2 + a_3^2 b_1 b_2 \triangle_3|}{2(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

§ 22.4 定理的应用

例 22.1 设 PA、PB、PC 为 $\odot O$ 的三条弦，分别以它们为直径作圆交于 D、E、F，则 D、E、F 共线.

证明 如图 22-7，据直径所对的圆周角为直角. 得 $PD \perp BC$，$PB \perp AC$，$PF \perp AB$，由西姆松定理，D、E、F 共线.

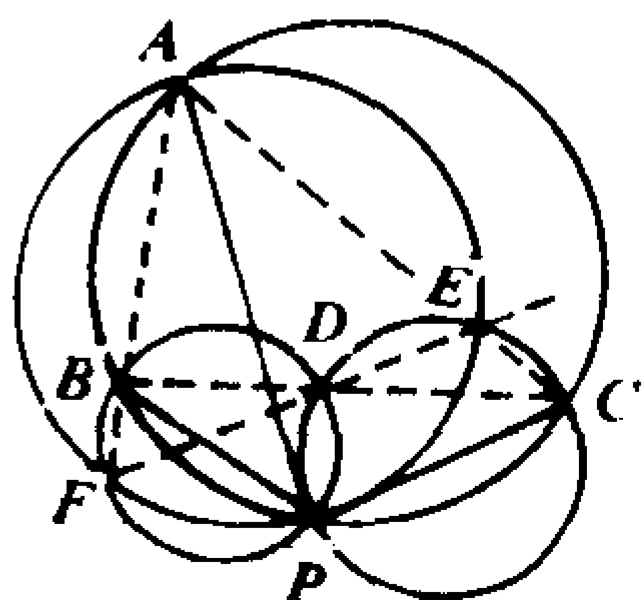


图 22-7

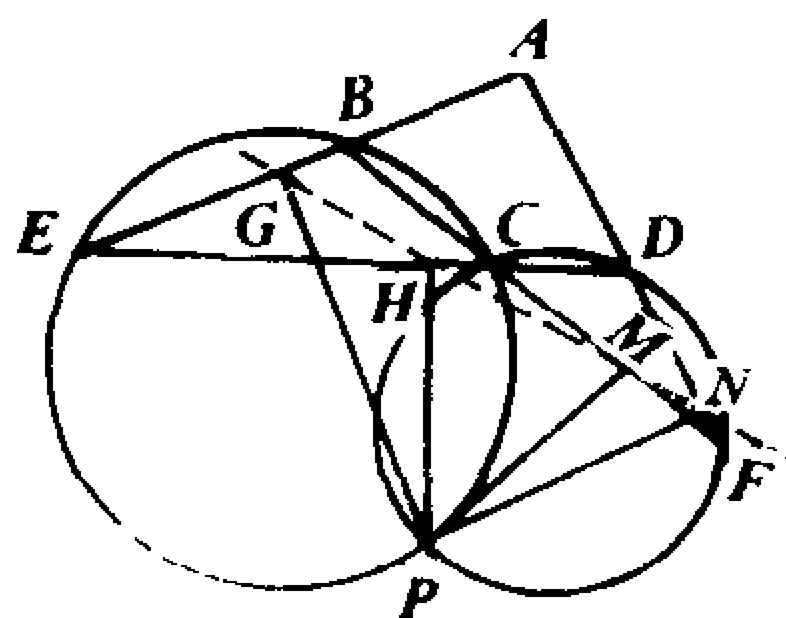


图 22-8

例 22.2 如图 22-8. 延长四边形 $ABCD$ 的边 AB、CD 交于 E，AD、BC 交于 F，圆 BCE 与圆 CDF 交于 P，则点 P 在 AB、

BC、CD、DA 上的射影 G、M、H、N 共线.

证明 因为 PG、PH、PM 分别垂直于 $\triangle BCE$ 的三边，故 G、H、M 共线；同理 H、M、N 也共线. 故 G、H、M、N 共线.

例 22.3 证明托勒密定理.

证明 如图 22-9，过点 D 作 $DE \perp BC$，$DF \perp AC$，$DH \perp AB$，E、F、H 为垂足. 则 A、F、D、H 四点在以 AD 为直径的圆上，由正弦定理有

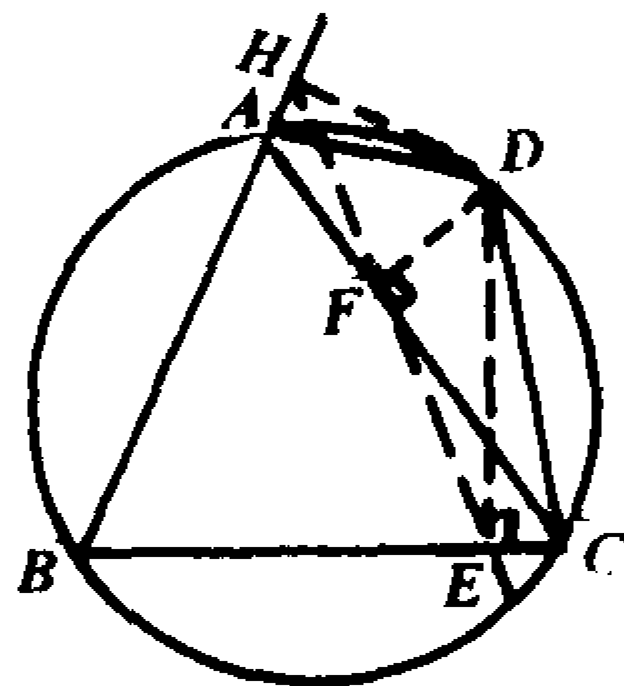


图 22-9

$$\frac{BC}{2R} = \sin\angle BAC = \sin\angle HAF = \frac{HF}{AD}$$

所以 $HF = \dfrac{BC \cdot DA}{2R}$.

同理 $EF = \dfrac{AB \cdot DC}{2R}$，$EH = \dfrac{AC \cdot DB}{2R}$.

(R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径)

因为 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆上，

所以 依西姆松定理 E、F、H 共线，故有

$$EH = EF + FH.$$

即 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$，为托勒密定理.

当点 D 不在 $\triangle ABC$ 外接圆上时，有

$$EF + FH > EH.$$

得 $AB \cdot CD + BC \cdot DA > AC \cdot DB$.

为托勒密定理的推广(见定理 7.2).

练习与思考

1. 在图 22-1 中，圆上什么点恰好以 BC 为西姆松线？

2. 是否有点落在它自己的西姆松线上？这是一些什么样的直线？

3. 证明外接圆直径两端点的西姆松线互相垂直，且相交在九点圆上.

4. 设$\triangle ABC$是$\odot O$的内接等边三角线，P是圆上任意一点，则点P的西姆松线平分半径OP.

第二十三章　笛沙格定理

§23.1　定　　理

笛沙格定理　若两个三角形对应顶点的连线共点，则其对应边的交点共线.

笛沙格(Desargues，1591 ～ 1661 年)是一位自学成才的法国数学家，是最具独创精神的著名学者之一. 笛沙格先前当过陆军军官，其后成为一名工程师和建筑师. 他很重视知识的应用，关心改进艺术家、工程师乃至石匠的教育和技艺，曾专门写过几何在泥瓦工、石工方面应用的书，还曾在巴黎免费给人们讲课，他不赞成为理论而搞理论.

笛沙格出版了好几种著作，其中包括 1636 年出版的有关透视学的书. 最被人称道的是他的《试图处理圆锥与平面相交情况的计划草案》，笛卡尔和帕斯卡极端推崇这本书，可是它并未立刻引起普遍的注意，也许笛沙格的主要兴趣在研究透视的应用.

笛沙格导入了无穷远点，无穷远线的概念，视平行线在无穷远处相交，将直线看成具有无穷大半径的圆. 他的工作被后人称为几何学的一个新分支 —— 射影几何学的开端.

§23.2　定理的证明

先把笛沙格定理改述成如下形式：

设平面上 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA'、

BB'、CC' 交于 S；对应边 BC 与 $B'C'$、AC 与 $A'C'$、AB 与 $A'B'$ 分别交于 P、Q、R. 则 P、Q、R 共线.

证明　如图 23-1，因直线 $PB'C'$ 截 $\triangle SBC$，由梅氏定理有 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CC'}{C'S}\cdot\frac{SB'}{B'B}=1$，

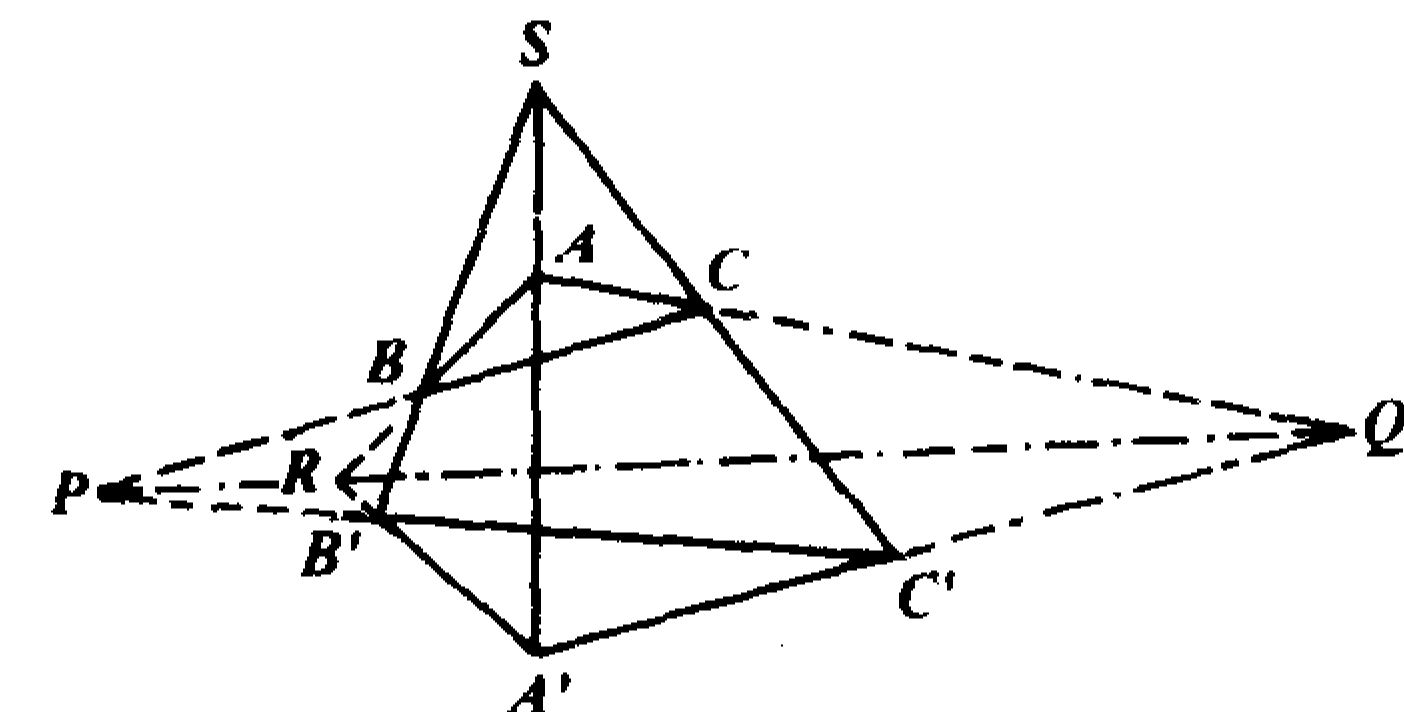


图 23-1

同理，直线 $QC'A'$ 截 $\triangle SCA$，有

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AA'}{A'S}\cdot\frac{SC'}{C'C}=1,$$

直线 $RB'A'$ 截 $\triangle SAB$，有

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BB'}{B'S}\cdot\frac{SA'}{A'A}=1.$$

三式相乘，得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

把 $\triangle ABC$ 看成梅氏三角形，得 P、Q、R 三点共线.

本定理也可以用平行截割定理法、解析法和矢量法证明.

笛沙格定理的逆命题也成立.

逆定理　若平面内两个三角形对应边的交点共线，则它们对应顶点的连线共点.

逆定理的证明留给读者.

§ 23.3　定理的推广

将笛沙格定理向三维空间推广，即两个三角形在不同的

两个平面内,结论仍然成立.

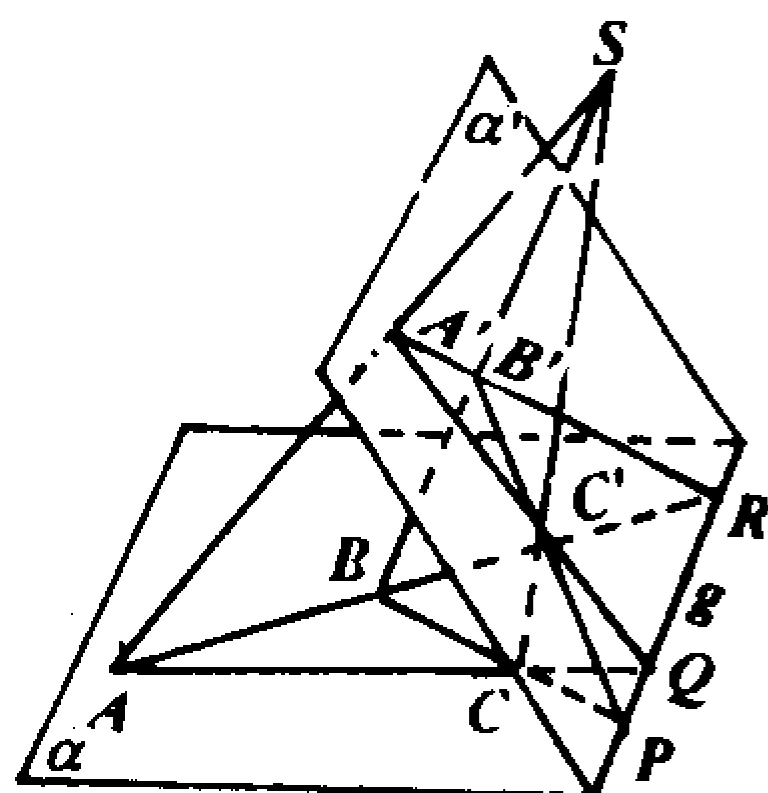


图 23-2

定理 23.1 在不同两平面 α、α' 上分别有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$,设它们对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 交于一点 S,对应边 BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$、AB 和 $A'B'$ 分别交于 P、Q、R. 则 P、Q、R 三点共线.

证明 因为 BB'、CC' 交于 S,因此它们在同一平面 β 内(图 23-2). 于是 BC、$B'C'$ 在 β 内;由题设它们相交,设交点为 P,因为 $BC \in \alpha$,$B'C' \in \alpha'$,所以其交点 P 在 α 和 α' 的交线 g 上.

同理,直线 CA 和 $C'A'$ 的交点 Q、AB 和 $A'B'$ 的交点 R 也在直线 g 上,故有 P、Q、R 共线.

有趣的是"推广"的证明比原定理的证明要简单得多.

§23.4 定理的应用

例 23.1 如图 23-3. 已知 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的三条高,BC 与 EF 交于 Q,AC 与 DF 交于 R,AB 与 DE 交于 P,则 P、Q、R 共线.

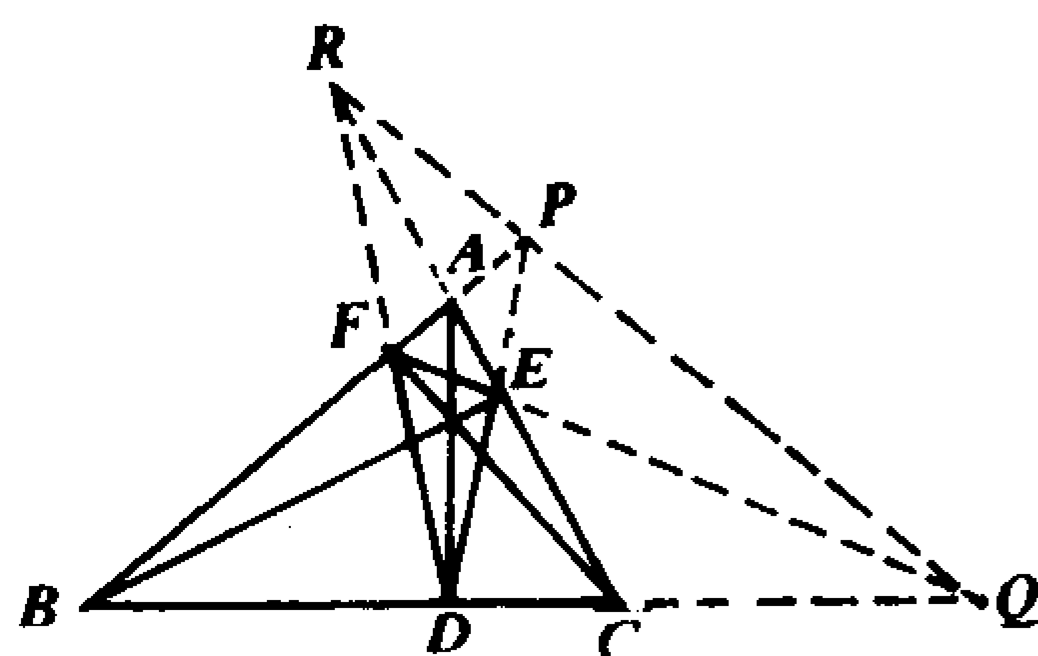
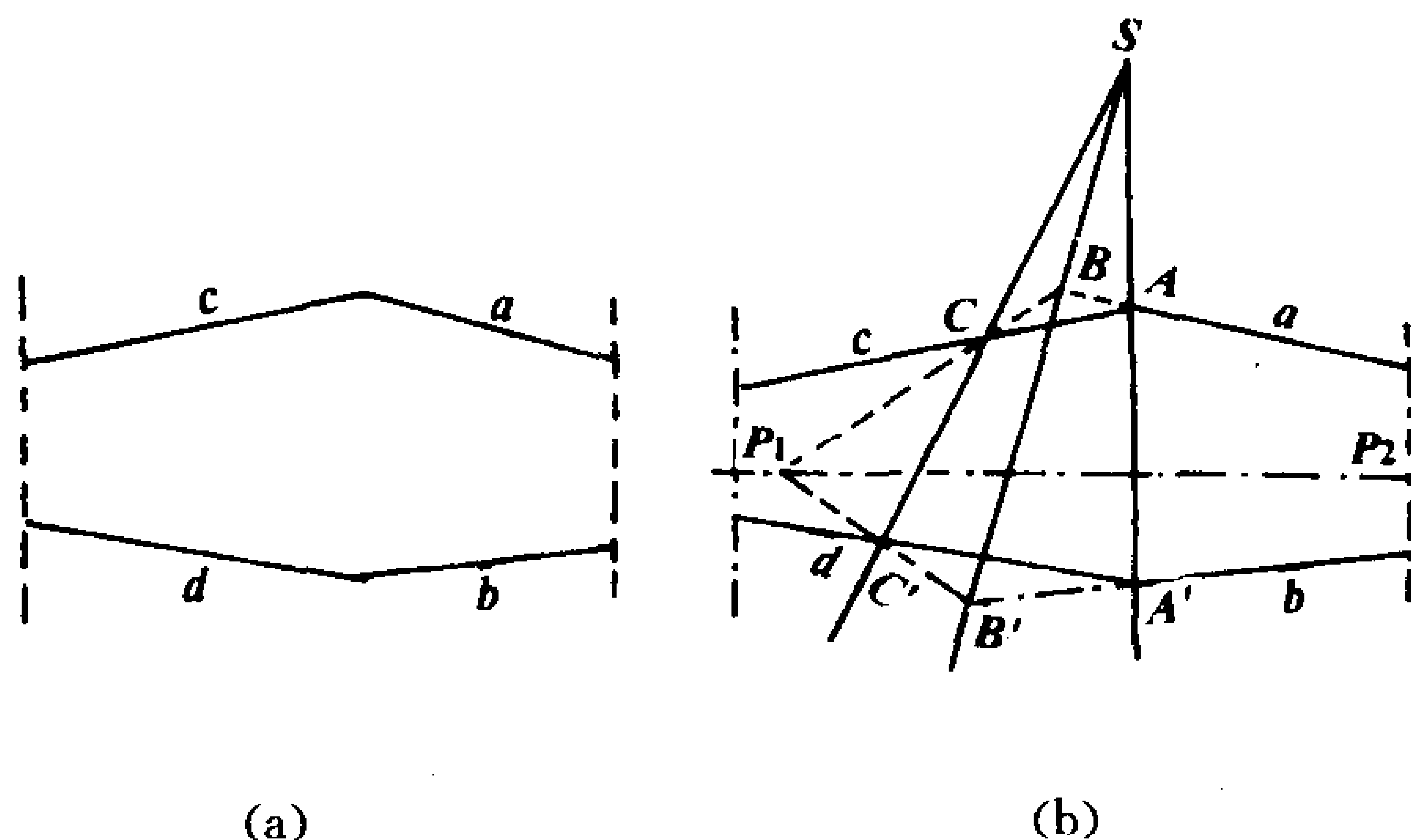


图 23-3

证明 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中,因为三对对应顶点 AD、BE、CF(三条高)交于一点,由笛沙格定理,则它们的对

应边的交点 P、Q、R 共线.

例 23.2 如图 23-4(a),a、b、c、d 为平面内四条直线,不作出 a、b 的交点和 c、d 的交点,求作一直线通过这两个交点.



(a) (b)

图 23-4

解 设 a、c 交于 A,b、d 交于 A',如图 23-4(b),过 AA' 上一点 S 在 AA' 一侧作直线 SBB'、SCC',使 a、b 与 SBB' 分别交于 B、B',c、d 与 SCC' 分别交于 C、C',连 BC、$B'C'$ 交于 P_1,则由笛沙格定理 P_1 与 a、b 的交点及 c、d 的交点共线.

同理可在 AA' 另一侧得 P_2,P_2 也在 a、b 交点与 c、d 交点的连线上.

从而连 P_1P_2 即为所求作的直线.

运用笛沙格定理的逆定理证三线共点也是极简便的.

练习与思考

1. $\triangle ABC$ 内切圆切三边 BC、CA、AB 于 D、E、F,且 BC 交 EF 于 P,CA 交 DF 于 Q,AB 交 DE 于 R,则 P、Q、R 共线.

2. 直线a、b平行于梯形$ABCD$的底AB，且直线a与AD交于M，与AC交于P；直线b与BD交于N，与BC交于Q，试证：MN与PQ的交点在梯形一底上.

3. 设直线a交$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA（或其延长线）于L、M、N，若直线AM、BN、CL交成$\triangle A'B'C'$，试证：AA'、BB'、CC'三线共点.

第二十四章　费马问题

§24.1　问　　题

费马问题　在已知$\triangle ABC$所在平面上求一点P,使它到三角形三顶点的距离之和为最小.

费马(Fermat,1601～1665年)是法国数学家,早年学法律,后来当律师,是一位社会活动家,还是都鲁斯市(他的家乡)的议员.但他酷爱数学,把全部业余时间用在数学研究上,在微积分、解析几何、概率论、数论等领域中,都作出了开创性的贡献.他同笛卡尔(Descartes,1596～1650年)一同被列为解析几何的奠基人,同时也是微积分的先驱者之一.微积分的发明者牛顿(Newton,1642～1727年)曾坦率地说是受费马的启示,是他在与巴斯卡(Pascal,1623～1662年)的来往书信中,对掷骰子赌博等有关数学问题的深入研究,点燃了古典概率论的火种,但费马贡献最大的领域当推数论.

上述费马问题,是费马1640年前后向意大利物理学家托里拆里(Torricelli,1608～1647年)提出的,托里拆里用多种方法解决了它,其中包括力学的方法.为了纪念这位伟大的业余数学家,这个问题中所求的点被人们称为费马点.

§24.4　问题的解

显然所求点不可能在三角形外,这一点读者可自己证明.下面我们分两种情况进行讨论.

1. 三角形三内角均小于 120°.

解法 1 自 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 向外侧作正三角形，设这两个正三角形的外接圆交于 $\triangle ABC$ 内一点 P，则 P 点即为所求.

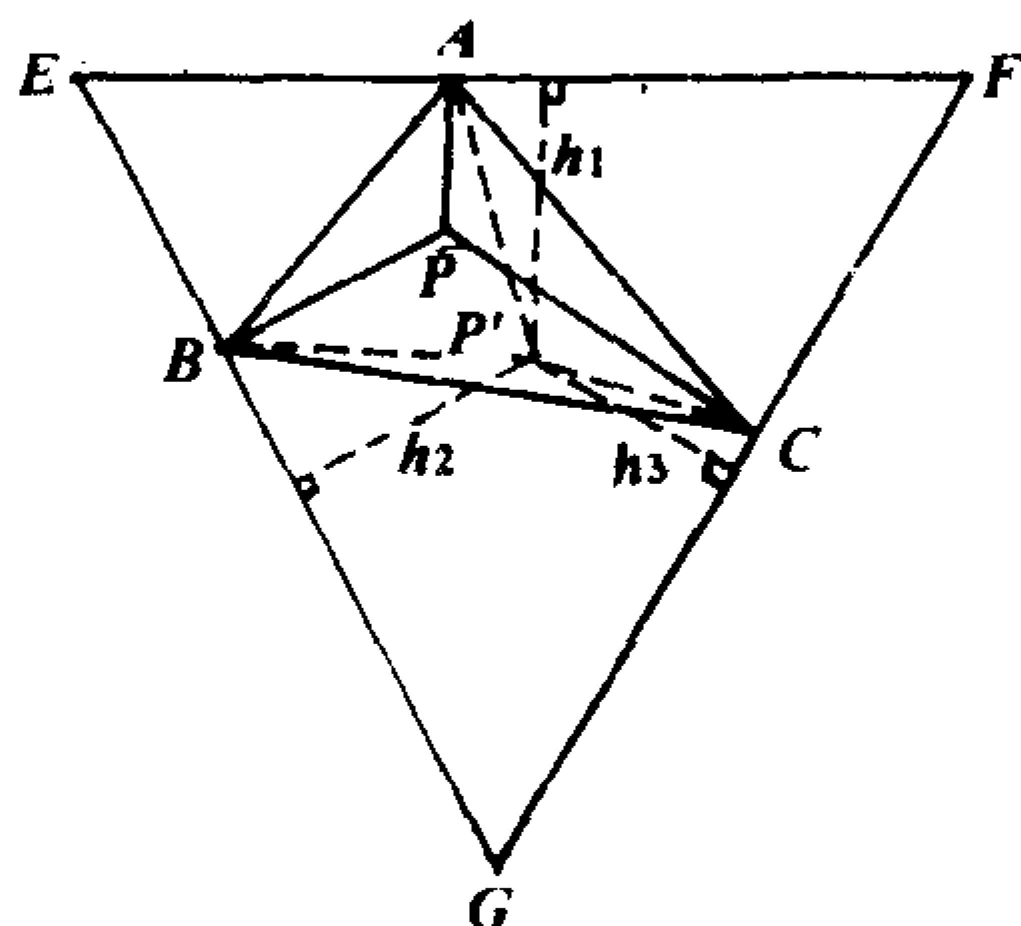


图 24-1

证明 以 BC 为边向外侧作正三角形，由第十八章拿破仑定理的证法 2 的推论知，这个正三角形的外接圆过点 P，且还有 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$.

过 A、B、C 三点分别作 PA、PB、PC 的垂线交成 $\triangle EFG$，如图 24-1，则 $\triangle EFG$ 为正三角形，设其高为 h，由维维安尼定理（见第十六章）有 $PA + PB + PC = h$，在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P'，设 P' 到 $\triangle EFG$ 三边的距离分别为 h_1、h_2、h_3，则也有 $h_1 + h_2 + h_3 = h$.

$$\text{而 } P'A + P'B + P'C \geqslant h_1 + h_2 + h_3 = h = PA + PB + PC.$$

所以 P 是 $\triangle ABC$ 内到 A、B、C 三顶点距离之和最小的点.

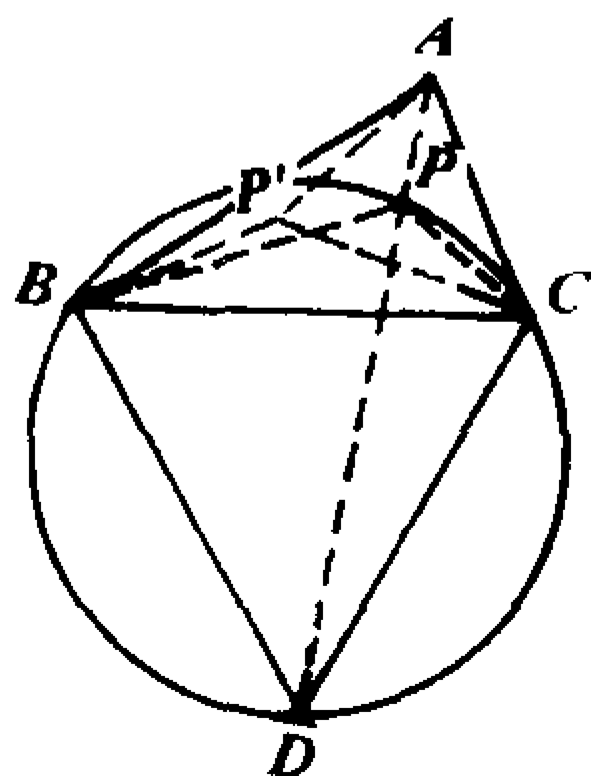


图 24-2

解法 2 如图 24-2，以 BC 为一边向外侧作正 $\triangle BCD$，连 AD，设与 $\triangle BCD$ 的外接圆交于 P，则 P 点即为所求.

证明 由例 7.3，有 $PD = PB + PC$. 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P'，由定理 7.2 有

$$P'C \cdot BD + DC \cdot P'B \geqslant BC \cdot P'D,$$

即 $P'C+P'B \geqslant P'D$.

所以 $P'A+P'B+P'C \geqslant P'A+P'D \geqslant AD$

$$=PA+PB+PC.$$

故 P 为所求之费马点.

2. 当有一角(不妨设为 A) $\geqslant 120°$ 时

如图24-3,Q为$\triangle ABC$内任一点,把$\triangle BQA$绕A点旋转,使AB旋转到CA的延长线上,得到$\triangle B'Q'A$,

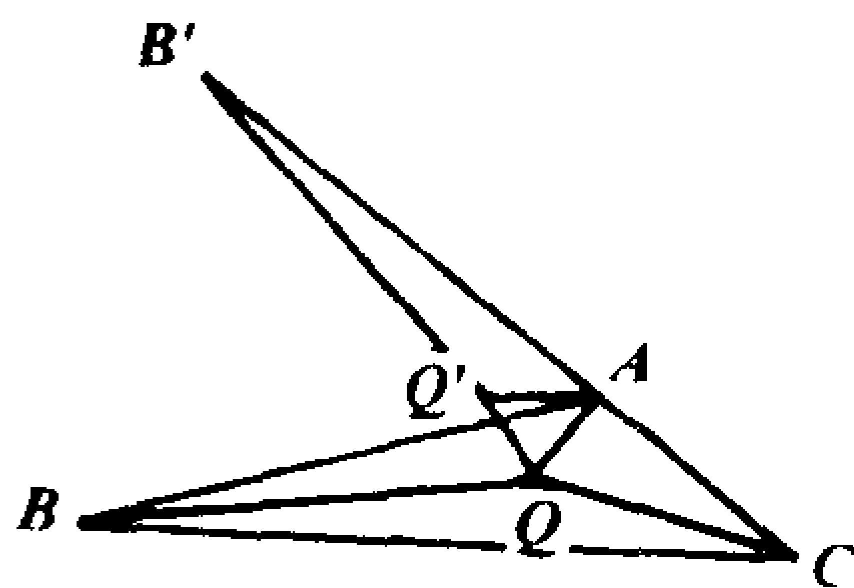


图 24-3

因为旋转角$\leqslant 60°$,所以$Q'Q \leqslant AQ$.

故 $QA+QB+QC \geqslant QQ'+Q'B'+CQ \geqslant CB'=CA+AB$.

等号当且仅当Q与A重合时成立,所以这时所求点即为A点.

§24.3 问题的引伸与推广

1. 定量的结论

首先,我们给出费马问题的一个定量的结论,这即是

定理 24.1 $\triangle ABC$ 三边分别为 a、b、c,面积为 S,P 为其费马点,则

$$PA+PB+PC=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)}.$$

证明 (图24-4)由余弦定理有

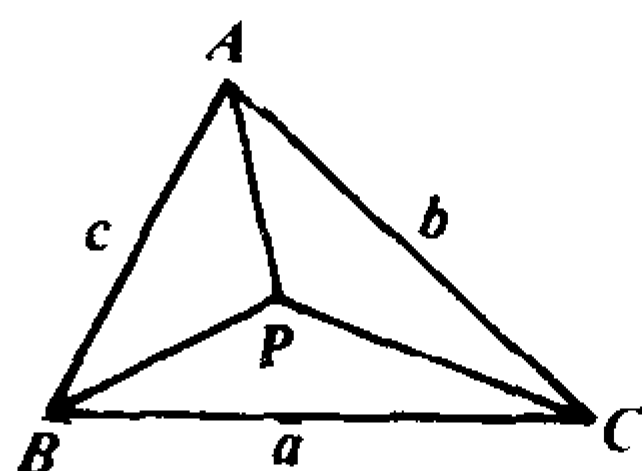


图 24-4

$$a^2+b^2+c^2$$
$$=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos 120°$$
$$+PB^2+PC^2-2PB\cdot PC\cos 120°$$
$$+PC^2+PA^2-2PC\cdot PA\cos 120°$$

$= 2(PA^2 + PB^2 + PC^2) + (PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA).$ ①

又 $S = \frac{1}{2}PA \cdot PB\sin120° + \frac{1}{2}PB \cdot PC\sin120° + \frac{1}{2}PC \cdot PA\sin120°$

$\Rightarrow PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA = \frac{4S}{\sqrt{3}}.$ ②

又因为 $(PA + PB + PC)^2 = (PA^2 + PB^2 + PC^2) + 2(PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA).$

将①、②代入上式整理即得

$$PA + PB + PC = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}.$$

2. 向二次线段推广

在费马问题中，把一次线段推广到二次线段，我们还有

定理 24.2 当 $\triangle ABC$ 所在平面上的点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时，有 $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 取最小值.

证明 设 $P(x,y)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \sum_{i=1}^{3}[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$$
$$= 3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3y^2 - 2(y_1 + y_2 + y_3)y + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

显然当 $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$，$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$，即 $P(x,y)$ 为 $\triangle ABC$ 重心时，$PA^2 + PB^2 + PC^2$ 取最小值.

更一般地，有

定理 24.3 设 A_1、A_2、…、A_n 为平面上的 n 个点，则当 P 为这 n 个点的重心时，

$PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2$

取最小值.

证明仿上,读者可自己给出.

3. 反向费马问题

最后我们讨论所谓反向费马问题. 即:在已知 $\triangle ABC$ 内或边上找一点 P,使 $PA+PB+PC$ 为最大. 对这个问题,我们有一个更一般的结论.

定理 24.4 凸多边形内部或边上任一点 P 到各顶点的距离之和至多为从某顶点到其它各顶点的距离之和.

证明略.

§24.4 应 用

例 24.1 P 为正三角形 ABC 内一点,P 到三边的距离为 PD、PE、PF,证明:

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF).$$

证明 如图 24-5,设正 $\triangle ABC$ 的中心为 O,则 O 为 $\triangle ABC$ 的费马点,因此,对任意点 P 有 $PA+PB+PC\geqslant OA+OB+OC=2h$,由维维安尼定理有 $PD+PE+PF=h$,代入上式得

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF).$$

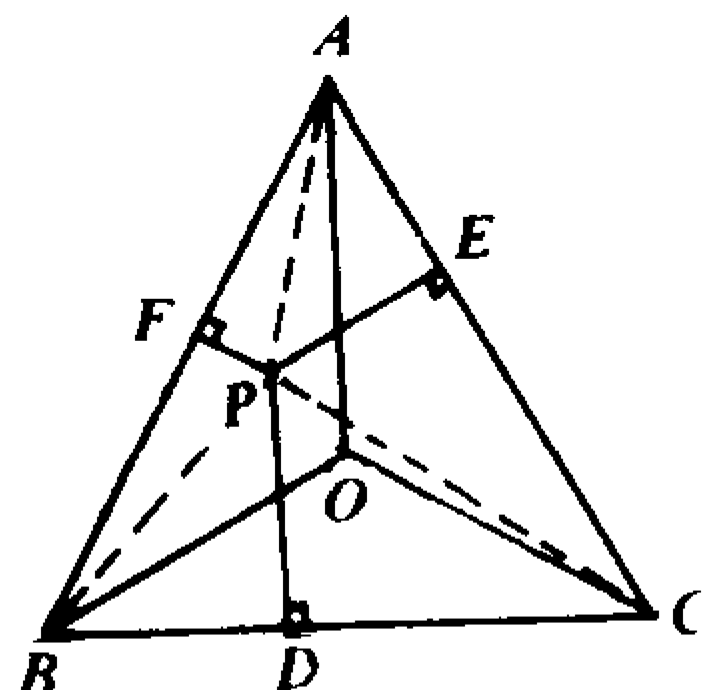


图 24-5

例 24.2 四个城市 A、B、C、D 恰好是一个正方形的顶点,要造一个公路系统,使得每两个城市都有公路连通. 证明最短的公路系统并不是对角线 AC 与 BD 构成的.

证明 如图24-6,设 AC、BD 交于 O,P 为 $\triangle OAD$ 的费马点,则

$$PA + PD + PO < OA + OD,$$

因此 $\quad PA + PD + PO + OB + OC < AC + BD.$

即 AC、BD 不构成最短的公路系统.

其最短的公路系统是什么,留给读者自己考虑.

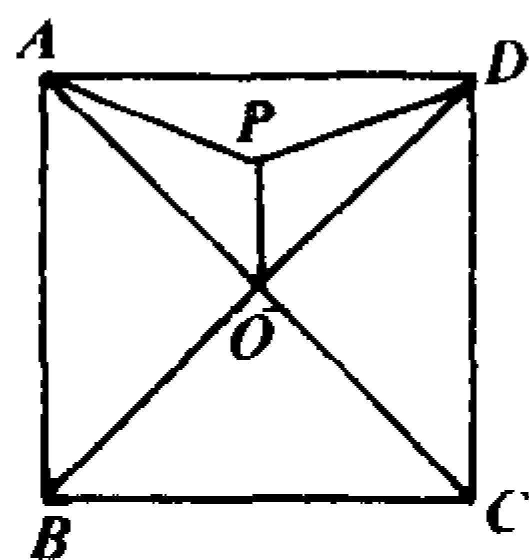


图 24-6

例 24.3 (Weitzenbock 不等式) 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 三边,面积为 S,则 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.

证明 在定理 24.1 的证明中,我们得到

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2) + (PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA) \quad ①$$

$$PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA = \frac{4S}{\sqrt{3}}. \quad ②$$

又 $\quad PA^2 + PB^2 \geqslant 2PA \cdot PB$, $PB^2 + PC^2 \geqslant 2PB \cdot PC$, $PC^2 + PA^2 \geqslant 2PC \cdot PA$.

所以 $\quad 2(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geqslant 2(PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA)$.

代入①得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3(PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PA) = 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}S = 4\sqrt{3}S.$$

练习与思考

1. Q 在锐角 $\triangle ABC$ 的边上,P 为费马点,证明:

$$QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

2. 设 F 为 $\triangle ABC$ 的费马点,a、b、c 为三边,求证:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant (FA + FB + FC)^2.$$

3. 一个战士想要查遍一个正三角形区域内和边界上所

有地雷，他的探测器的有效度等于正三角形高的一半，这个战士从三角形的一个顶点开始探测，问他循怎样的探测路线才能使查遍整个区域的路程最短.

参考文献

专著与论文

1 M·克莱因.古今数学思想(1～4册).上海:上海科学技术出版社,1979～1982

2 梁宗巨.世界数学史简编.沈阳:辽宁人民出版社,1981

3 解延年,尹斌庸.数学家传.长沙:湖南教育出版社,1987

4 梁绍鸿.初等数学复习及研究(平面几何).北京:人民教育出版社,1978

5〔美〕H·S·M·考克瑟特,S·L·格雷策.几何学的新探索.北京:北京大学出版社,1986

6〔日〕矢野健太郎.几何的有名定理.上海:上海科学技术出版社,1986

7〔苏〕B·Д·契斯佳可夫.初等数学古代名题集.北京:科学普及出版社,1984

8 吴振奎.斐波那契数列.沈阳:辽宁教育出版社,1987

10〔美〕N·D·卡扎里诺夫.几何不等式.北京:北京大学出版社,1986

11 毛淑芬.勾股定理的一个推广.中学数学教学,1982,1

12 黄家礼.勾股定理的一个推广及应用.中学数学报,第(73)

13 单墫.黄金矩形的一些性质.中学生数学,1981,1

14 蒋省吾.黄金数种种.数学教师,1985,3

15 杜锡录.几何中的名题及其妙解.数学教师,1985,1

16 黄家礼.梅涅劳斯定理的推广和应用.中学数学(武

汉),1984,7

17 张潋. Ceva 定理的推广. 中学数学教学,1985,3

18 唐梓洲. 海伦公式的五种证明. 数学通讯,1986,2

19 欧培辅,李长禄. 类似于海伦公式的四面体体积公式. 数学教学研究,1984,4

20 陈金辉. 四面体的求积公式. 数学通报,1985,3

21 刘汉标,顾忠德. Ptolemy 定理的推广. 中学数学教学,1983,3.

22 高灵. Ptolemy 定理的一个推广. 中学数学教学,1985,1

23 孙建斌. Schooten 定理的证明. 数学教学研究,1986,1

24 傅小青. 角平分线定理的一个推广. 数学教学通讯,1986,5

25 于志洪. 分角线定理的推广及应用. 数学通讯,1982,6

26 黄家礼. 三角形角平分线定理的一个推广. 中学数学报,1983,10

27 杨学枝. 一个平几定理的推广. 中学数学研究,1986,11

28 张平安. 圆幂定理的加强及应用. 湖南数学通讯,1986,4

29 华漫天. 由垂心定理想到的. 数学通讯,1984,12

30 马元鹿. 多边形的垂心定理. 数学教师,1986,4

31 娄志渊. 三角形重心垂心外心的扩充定理. 数学通讯,1954,5.

32 黄家礼. 中位线定理及其推广. 中学数学(武汉),1986,6

33 杨克昌. 一个著名几何命题的推广. 湖南数学通讯,

1984,6

34 叶添善. 一道著名几何题的直接证法和反证法. 数学通讯,1983,2

35 黄全福. 一个"闻名难题"的几种新证法. 厦门数学通讯,1985,1

36 孙加荣. 关于 Simson 定理推广的证明. 数学通讯,1986,2

37 程李强. 西摩松线的推广. 中学数学教学,1984,6

38 张焕明. 从浙大少年班的一个招考题谈起. 教学与研究(中学数学),1985,6

39 马明. 蝴蝶定理的变异. 数学教师,1985,6

40 陈荷桥. 关于内切圆和外接圆的欧拉定理. 中学数学教学,1986,3

41 王勤国. Morley 逆定理的一个证明. 数学通报,1982,8

42 郭九皋,赵国民. 托勒密定理的推广及其应用一例. 中学数学教学参考,1984,5

43 陈计. 反向 Fermat 问题的推广. 数学通讯,1984,5

44 蝴蝶定理. 中学数学文摘(A). 1986,4

45 Brahmagupta 定理. 中学数学文摘(A),1987,1

46 笛沙格定理,中学数学文摘(A),1987,3

47 黄家礼. 托勒密定理. 数学教师,1988,4.

48 黄家礼. 阿波罗尼斯定理及其推广和应用. 数学教师,1997,6